GALOIS-ELMÉLET / 2006 TAVASZ

10. HÁZI FELADAT

1. * Legyen L az $X^4-2 \in \mathbb{Q}[X]$ felbontási teste. Számítsuk ki az L/K bővítésre vonatkozó nyomot és normát egy alkalmas bázisban.

Az alábbiakban rögzítsünk egy p prímszámot, és legyen R egy tetszőleges kommutatív gyűrű, amelyben p invertálható.

2. Definiáljuk a $W_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ (n természetes szám) *Witt-polinom*ot az alábbi formulával:

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} p^i X^{p^{n-i}} \ .$$

Mutassuk meg, hogy minden $n > 0$ esetén

$$W_n = W_{n-1}(X_0^p, \dots, X_{n-1}^p) + p^n X_n \ ,$$

továbbá minden $n \geq 0$ esetén X_n felírható mint $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ -beli együtthatós polinomja $W_0, \dots, W_n$-nek. Adjuk meg a fenti képletet az $n = 1, 2, 3$ esetekben.

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_0, \dots a_n, b_0, \dots, b_n \in R$ elemekre és $r > 0$ természetes számra az alábbi két állítás ekvivelens:
(1) Minden $0 \leq i \leq n$ esetén $a_i \equiv b_i \pmod{p^r}$.
(2) Minden $0 \leq i \leq n$ esetén $W_i(a_0, \dots, a_i) \equiv W_i(b_0, \dots, b_i) \pmod{p^{r+1}}$.

4. Mutassuk meg, hogy az alábbi

$$\begin{array}{rcl} \omega_n : \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X_0, \dots, X_n] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\frac{1}{p}][X_0, \dots, X_n] \\ f(X_0, \dots, X_n) & \mapsto & f(W_0, \dots W_n) \end{array}$$

endomorfizmus bijektív.

5. * Igazoljuk, hogy a

$$\begin{array}{rcl} w : R^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & R^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & (W_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

leképezés bijektív.

Definíció (Witt-vektorok gyűrűje): Jelölje $+_c, \cdot_c$ $R^{\mathbb{N}}$-ben a komponensenkénti összeadást, illetve szorzást. Az R-hez tartozó $W(R)$ ún. *Witt-gyűrű* mint halmaz legyen

$$W(R) \stackrel{\text{def}}{=} R^{\mathbb{N}} \ ,$$

a műveletek pedig $x + y \stackrel{\text{def}}{=} w^{-1}(w(x) +_c w(y))$, illetve $x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} w^{-1}(w(x) \cdot_c w(y))$.

6. Mutassuk meg, hogy az iménti műveletekkel $W(R)$ egy kommutatív gyűrű, továbbá $w : W(R) \to R^{\mathbb{N}}$ egy gyűrűizomorfizmus.

7.** Legyen $\Phi \in \mathbb{Z}[U, V]$. Ekkor minden n természetes számra létezik pontosan egy olyan $\phi_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots Y_n]$ polinom, hogy

$$W_n(\phi_0, \dots, \phi_n) = \Phi(W_n(X_0, \dots, X_n), W_n(Y_0, \dots, Y_n))$$

minden n-re.

Az iménti állítást az $U + V$ és UV polinomokra alkalmazva lássuk be, hogy léteznek olyan egyértelműen meghatározott $S_n, P_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots Y_n]$ polinomok, amelyekre

$$x + y = (S_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}} \ , \ x \cdot y = (P_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$$

minden $n \geq 0$ és $x, y \in W(R)$ esetén.