Galois-elmélet / 2006 tavasz

11. Házi feladat

Definíció: Legyen R egy tetszőleges gyűrű, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén M_n egy bal R-modulus, továbbá $\phi_n : M_n \to M_{n+1}$ egy R-modulushomomorfizmus. Az $M \overset{\text{def}}{=} \{ M_., \phi_. \}$ rendszert R-modulusok egy *komplexus*ának nevezzük, ha minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\phi_n \circ \phi_{n-1} = 0$, azaz $\operatorname{im} \phi_n \subseteq \ker \phi_{n-1}$. Az M komplexus n-edik *homológiamodulus*a

$$H_n(M_.) \overset{\text{def}}{=} \frac{\ker \phi_n}{\operatorname{im} \phi_{n+1}} \ .$$

1. Legyen $R = \mathbb{Z}$, $M_n = \mathbb{Z}/4$ ha $n \geq 0$ és 0 ha $n < 0$, továbbá $n > 0$ esetén legyen $\phi_n(x) \overset{\text{def}}{=} 2x$ (egyébként azonosan nulla). Mutassuk meg, hogy $M_.$ egy komplexus, és számoljuk ki az összes homológiamodulusát.

2. Értelmezzük Hilbert 90-es tételét a $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ bővítés esetén.

3. Legyen K tetszőleges test, L az $X^n - a \in K[X]$ polinom felbontási teste, ahol $\operatorname{char} K$ nem osztja n-et. Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz L/K ciklikus.

4. * (Az additív Hilbert 90-es tétel kohomologikus változata) Legyen L/K véges Galois-bővítés, $G \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Gal}(L/K)$. Mutassuk meg, hogy $H^1(G, L) = 0$, ahol most L-et mint additív csoportot tekintjük.

5. (Pitagoraszi számhármasok) Vezessük le Hilbert 90-es tétele segítségével, hogy az $a, b \in \mathbb{Q}$ számokra pontosan akkor teljesül $a^2 + b^2 = 1$, ha léteznek $m, n \in \mathbb{Z}$, amelyekre

$$a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \ , \ b = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \ .$$

6. Legyen p prímszám, $G \subseteq \operatorname{Sym}_p$ tetszőleges tranzitív részcsoport. Ekkor G tartalmaz egy H p-edrendű részcsoportot. Amennyiben G feloldható is, akkor H egyértelműen meghatározott, és így normálosztó.

7. * Tetszőleges p prímszám esetén legyen $G \leqslant \operatorname{Sym}_p$ feloldható tranzitív részcsoport. Ha egy $\sigma \in G$ elemnek legalább két fixpontja van, akkor $\sigma = 1$.