

1. HÁZI FELADAT

1. * Legyen L/K egy tetszőleges testbővítés, E, F köztes testek, amelyekre $E/K, F/K$ véges Galois-bővítés. Igazoljuk az alábbiakat:

(i) Az $E \cdot F$ kompozit véges Galois, és a

$$\begin{aligned} \phi : \text{Gal}(E \cdot F/E) &\longrightarrow \text{Gal}(F/E \cdot F) \\ \sigma &\longmapsto \sigma|_F \end{aligned}$$

leképezés izomorfizmus.

(ii) Az alábbi

$$\begin{aligned} \psi : \text{Gal}(E \cdot F/K) &\longrightarrow \text{Gal}(E/K) \times \text{Gal}(F/K) \\ \sigma &\longmapsto (\sigma|_E, \sigma|_F) \end{aligned}$$

leképezés injektív. Továbbá amennyiben $E \cap F = K$, akkor ψ is izomorfizmus.

2. * Tekintsünk egy L/K véges Galois-bővítést, és hozzá L_1, L_2 köztes testeket, amelyek a $H_1, H_2 \subseteq \text{Gal}(L/K)$ részcsoporthoz tartoznak. Mutassuk meg, hogy egy $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ elemre $\sigma(L_1) = L_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\sigma H_1 \sigma^{-1} = H_2$.

3. (i) Igazoljuk, hogy egy Hausdorff topologikus térben egy konvergens sorozatnak pontosan egy limesze van.

(ii) Lássuk be, hogy egy Hausdorff-tér minden részhalma Hausdorff az altértopológiára nézve.

(iii) Mutassuk meg, hogy ha $f : X \rightarrow Y$ topologikus terek közti folytonos függvény, X kompakt, akkor f zárt halmazokat zárt halmazokra képez.

4. Jelölje \mathbb{Q} a racionális számok testének egy algebrai lezártját. Határozzuk meg az összes $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \rightarrow \mathbb{Q}$ homomorfizmust, illetve ezek képeit.

5. Ellenőrizzük, hogy az $f(X) = X^3 + aX + b$ polinom diszkriminánsa valóban $\Delta = -4a^3 - 27b^2$.

6. Határozzuk meg az alábbi polinomok Galois-csoportjait \mathbb{Q} felett: $X^3 + 6X^2 + 11X + 7$, $X^3 - 3X^2 - 1$, $X^3 + 7X^2 - 1$.

7. Legyenek X, Y, Z topologikus terek, $f : X \times Y \rightarrow Z$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos, ha mindkét változójában folytonos.

8. * Igazoljuk, hogy két Hausdorff topologikus tér szorzata szintén Hausdorff.