Galois-elmélet / 2006 tavasz

3. Házi feladat

1. * Legyen G topologikus csoport, jelölje G° G-nek az egységelemet tartalmazó összefüggőségi komponensét. Igazoljuk, hogy G° zárt normálosztó G-ben.

2. Adjuk meg (izomorfia erejéig) az összes nyolcelemű csoportot.

3. ** Legyen G egy topologikus csoport, $H \leq G$ egy zárt részcsoportja. Mutassuk meg, hogy a H szerinti baloldali mellékosztályok

$$G/H \stackrel{\text{def}}{=} \{\, gH \mid g \in G \,\}$$

halmaza a $\pi : G \to G/H$ természetes projekció által indukált hányadostopoloógiával ellátva Hausdorff topologikus tér. Igazoljuk továbbá, hogy π nyílt leképezés.

4. Határozzuk meg az alábbi polinomok Galois-csoportjait:
   (1) $X^4 - X^4 - 3 \in \mathbb{F}_5[X]$,
   (2) $X^4 - X^4 - 3 \in \mathbb{F}_7[X]$,
   (3) $X^4 + 7X^2 - 4 \in \mathbb{F}_13[X]$.

5. * (Normális bővítések ekvivelens jellemzései) Igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek minden L/K algebrai testbővítés esetén:
   (1) Tetszőleges $L \to \overline{L}$ K-homomorfizmus megszorítható L egy automorfizmusává.
   (2) Ha az $f \in K[X]$ polinomnak van nullhelye L-ben, akkor f felbomlik L felett lineáris tényezők szorzatára.
   (3) L egy $K[X]$-beli polinomhalmaz felbontási teste.

6. Tekintsük a racionális számok testének az $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ bővítését.
   (1) Igazoljuk, hogy L az $X^4 - 2$ polinom felbontási teste $\mathbb{Q}$ felett.
   (2) Számoljuk ki $L/\mathbb{Q}$ fokát.
   (3) Határozzuk meg L összes $\mathbb{Q}$-automorfizmusát.
   (4) Mutassuk meg, hogy $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$.

7. Legyen L/K egy n-edfokú bővítés. Legyen továbbá $\alpha \in L$ olyan elem, amelyre léteznek $\sigma_i \in \mathrm{Aut}_K(L)$ automorfizmusok minden $1 \leq i \leq n$ esetén úgy, hogy

$$\sigma_i(\alpha) = \sigma_j(\alpha) \iff i = j \ .$$

Mutassuk meg, hogy $L = K(\alpha)$.

8. Legyen p tetszőleges prímszám, és tekintsük a p feletti kétváltozós $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$ fügvénytestet. Jelölje továbbá $\phi : L \to L$, $\phi : f \mapsto f^p$ a Frobenius-homomorfizmust, és legyen $K = \phi(L)$.
   (1) Számoljuk ki az L/K bővítés fokát és szeparabilitási fokát.
   (2) Igazoljuk, hogy L/K nem egyszerű bővítés.