Galois-elmélet / 2006 tavasz

4. Házi feladat

1. * Az alábbi lépések segítségével mutassuk meg, hogy egy L/K algebrai testbővítés pontosan akkor egyszerű, ha véges sok köztes teste van.

(1) Igazoljuk az állítást arra az esetre, ha K véges, innentől kezdve tegyük fel, hogy végtelen.
(2) Legyen $L = K(\alpha)$, $f \in K[X]$ pedig α minimálpolinomja K felett. Lássuk be, hogy L/K köztes testjei azonosíthatók f osztóinak mint $L[X]$-beli polinomoknak egy bizonyos részhalmazával.
(3) Tegyük fel, hogy L/K-nak csak véges sok köztes teste van. Először is vezessük vissza a kívánt állítást arra az esetre, amikor L két elemmel generált K felett, majd az $L = K(\alpha, \beta)$ esetben tekintsük a $K(\alpha + c\beta)$ testeket, ahol $c \in K$.

2. Legyen $g \in K[X]$ szeparábilis egy főegyütthatós polinom, L/K g egy felbontási testje; jelölje továbbá $x_1, \dots, x_n$ g gyökeit L-ben. Tekintsük L/K Galois-csoportját mint $S \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Sym}(\{ x_1, \dots . x_n \})$ részcsoportját, és rögzítsünk egy tetszőleges $H \subseteq S$ részcsoportot. Legyen továbbá $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, és

$$F \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sigma \in S \,|\, f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, \dots, X_n) \right\} .$$

A g polinomnak az f polinomra és H-ra vonatkozó $R_H(f, g)$ *rezolvens polinom*ja

$$R_H(f, g) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\sigma F \in H/F} (X - f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})) .$$

Mutassuk meg, hogy amennyiben $H \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$, akkor $R_H(f, g) \in K[X]$.

3. ** Tekintsünk egy k testet, és jelölje $K \overset{\text{def}}{=} k(X)$ a k-együtthatós racionális függvények testét. Igazoljuk, hogy

$$\mathrm{Aut}_k(K) \cong PGL(2, k) \ (\overset{\text{def}}{=} GL(2, k)/k^\times \ ) .$$

4. Legyen L/K véges Galois-bővítés G Galois-csoporttal; tekintsük G természetes hatását L-en. Írjuk le egy $a \in L$ elem esetén a stabilizátorát és orbitját, illetve határozzuk meg ezek elemszámát.

5. * Legyen X egy véges halmaz, G egy véges csoport, ami hat X-en. Egy $g \in G$ elem esetén jelölje $\mathrm{Fix}(g)$ a g elem fixpontjainak a halmazát.

(1) (Burnside-formula) Mutassuk meg, hogy G-nek pontosan

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

orbitja van X-en.
(2) Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|^2 \geq 2 .$$

6. ** (Cameron–Cohen) Az előző feladat jelölésével tegyük fel, hogy G tranzitívan hat X-en. Lássuk be, hogy G legalább $|G|/|X|$ elemének nincs fixpontja.

7. Legyenek $K \subset L \subset M$ algebrai testbővítések, M/K normális. Mutassuk meg, hogy

$$[L : K]_s = \#\mathrm{Hom}_K(L, M) .$$

8. Legyen L/K egy testbővítés, ahol $\mathrm{char}\, K = p > 0$. Igazoljuk, hogy egy K felett algebrai $\alpha \in L$ elem pontosan akkor szeparábilis K felett, ha $K(\alpha) = K(\alpha^p)$.