Galois-elmélet / 2006 tavasz

5. Házi feladat

1. Legyen G egy csoport, X pedig G részcsoportjainak a halmaza. Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{array}{rcl} \alpha : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, H) & \mapsto & gHg^{-1} \end{array}$$

hozzárendelés a G csoport egy hatása X-en. Adjuk meg egy $H \leqslant G$ részcsoport pályáját. Igazoljuk továbbá, hogy ha $|G| = p^k$, G nem abel, akkor

$$|\{\, G \text{ részcsoportjai} \,\}| = pm \cdot |\{\, G \text{ normálosztói} \,\}|$$

valamely m természetes számra.

2. Legyen p egy prímszám, G egy csoport, $|G| = p^k$ ($k \geq 1$ egész szám). Lássuk be, hogy $Z(G) \neq 1$.

3. * Tekintsünk egy L/K normális algebrai testbővítést, és legyen $f \in K[X]$ egy egy főegyütthatós irreducibilis polinom. Jelölje f L-beli irreducibilis polinomokra történő felbontását

$$f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r\ ,$$

ahol az f_i-k is mind egy főegyütthatós polinomok. Mutassuk meg, hogy minden $1 \leq i \neq j \leq r$ indexpárra létezik olyan $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$ automorfizmus, amelyre $f_j = f_i^{\sigma}$.

4. Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások minden X topologikus tér esetén ekvivalensek:
   (1) X Hausdorff
   (2) A $\delta : X \to X \times X$, $\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x, x)$ leképezés zárt (azaz zárt halmazokat zárt halmazokra képez).
   (3) Bármely két $f, g : X \to Y$ folytonos függvényre a
   $$K(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\} \subseteq X$$
   halmaz zárt.

5. Igazoljuk, hogy az alábbiak tetszőleges G topologikus csoportra ekvivelensek:
   (1) G Hausdorff topologikus tér.
   (2) $\delta : G \to G \times G$, $\delta(x) = (x, x)$ zárt leképezés.
   (3) Bármely $f, g : G \to H$ homomorfizmusokra $K(f, g) = \{\, x \in G \mid f(x) = g(x) \,\} \subseteq G$ zárt halmaz.
   (4) Bármely $f : G \to H$ homomorfizmus esetén $\ker f \subseteq G$ zárt részcsoport.
   (5) $\{\, 1 \,\} \subseteq G$ zárt részcsoport.
   (6) G T_1 topologikus tér.
   (7) G T_0 topologikus tér.
   (8) Az egységelem összes környezetének metszete $\{\, 1 \,\}$.

(Mivel a fenti tulajdonságok igen természetes feltevésnek tűnnek egy topologikus csoportra, ezért sokan a topologikus csoport definíciójában eleve kikötik a Hausdorff tulajdonságot.)

6. * Legyen G topologikus csoport. Ekkor
   (1) G minden nyílt részcsoportja zárt is egyben; minden zárt és véges indexű G-beli részcsoport nyílt.
   (2) Minden olyan $H \leqslant G$, ami 1_G egy nyílt környezetét tartalmazza, nyílt.
   (3) Ha $H \leqslant G$, akkor G/H pontosan akkor diszkrét, ha $H \subseteq G$ nyílt.
   (4) Egy összefüggő topologikus csoportnak nincs valódi nyílt részcsoportja.