Galois-elmélet / 2006 tavasz

6. Házi feladat

1. Legyenek G, $\{ G_i \mid i \in I \}$ topologikus csoportok, $H \leqslant G$. Igazoljuk az alábbiakat:
   (1) Ha G Hausdorff, akkor H is Hausdorff.
   (2) G/H pontosan akkor Hausdorff, ha $H \subseteq G$ zárt részcsoport.
   (3) $\prod_{i \in I} G_i$ pontosan akkor Hausdorff, ha minden $i \in I$ esetén G_i Hausdorff.
   (4) Ha G összefüggő, akkor G/H is az.
   (5) Ha H és G/H összefüggő, akkor G is összefüggő.
   (6) $\prod_{i \in I} G_i$ pontosan akkor összefüggő, ha minden $i \in I$ esetén G_i összefüggő.

2. Tekintsünk egy tetszőleges X halmazt, legyen továbbá $\{ X_i \mid i \in I \}$ X részhalmazainak egy rendszere. Minden olyan X_i, X_j halmazpárra, amelyekre $X_j \subseteq X_i$, jelölje $f_{ij} : X_j \to X_i$ a természetes inklúziót.
   (1) Legyen $i \leq j$, ha $X_j \subset X_i$. Igazoljuk, hogy (X_i, f_{ij}) halmazok egy projektív rendszere. Lássuk be, hogy az iménti rendszer projektív limesze $\bigcap_{i \in I} X_i$.
   (2) Legyen most $i \leq j$, amennyiben $X_i \subset X_j$. Mutassuk meg, hogy (X_i, f_{ji}) halmazok egy induktív rendszere, továbbá hogy az iménti rendszer direkt limesze $\bigcup_{i \in I} X_i$.

3. * Létezik-e olyan L/K Galois-bővítés, amelyre $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}$?

4. * (p-adikus számok I.) Legyen p egy tetszőleges prímszám. Jelölje $l \leq m$ pozitív egészek esetén

$$\begin{aligned} \pi_{lm} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \\ x + p^m\mathbb{Z} &\mapsto x + p^l\mathbb{Z} \end{aligned}$$

a természesetes leképezést. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}, \pi_{kl})$ projektív rendszer. Ennek a rendszernek az inverz limeszét *p-adikus egész számok*nak hívjuk, jele $\mathbb{Z}_p$.

5. (p-adikus számok II.) Egy $a \in \mathbb{Z}_p$ p-adikus egészre legyen $v(a)$ az a legnagyobb természetes szám, amelyre az a elem $\mathbb{Z}/p^{v(a)}\mathbb{Z}$-beli képe 0. Az $a = 0$ esetben legyen $v(a) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$. Definiáljuk továbbá $a \in \mathbb{Z}_p$ p-adikus abszolútértékét az alábbi módon:

$$|a|_p \stackrel{\text{def}}{=} p^{-v(a)} \ .$$

Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{Z}_p$ esetén
   (1) $|a|_p = 0$ pontosan akkor ha $a = 0$,
   (2) $|a \cdot b|_p = |a|_p \cdot |b|_p$,
   (3) $|a + b|_p \leq \max \{ |a|_p, |b|_p \}$.

Vegyük észre, hogy a $d(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} |a - b|_p$ választással $\mathbb{Z}_p$ metrikus térré tehető.

6. Igazoljuk, hogy a p-adikus abszolútérték a $\mathbb{Z}_p$ topologikus gyűrűn a provéges topológiát adja.

7. Mutassuk meg, hogy minden $a \in \mathbb{Z}_p$, amelyre $|a|_p = 1$, egység $\mathbb{Z}_p$-ben.

8. Legyen L/K Galois-bővítés, $H \subseteq \mathrm{Gal}(L/K)$. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:
   (1) H nyílt $\mathrm{Gal}(L/K)$-ban.
   (2) H zárt $\mathrm{Gal}(L/K)$-ban, és L^H/K véges testbővítés.