Galois-elmélet / 2006 tavasz

7. Házi feladat

1. Legyen p prímszám, $q = p^n$, továbbá $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ egy k-adfokú véges testbővítés. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F})$ k-edfokú ciklikus csoport, amelyet az

$$\phi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}\,,\; a \mapsto a^q$$

ún. relatív Frobenius-homomorfizmus generál.

2. Mutassuk meg, hogy rögzített p prímszám esetén

$$\mathbb{F}_{p^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{n!}}$$

az $\mathbb{F}_p$ test egy algebrai lezártja.

3. * Legyen p tetszőleges prízsám, n pozitív egész.
   (1) Mutassuk meg, hogy egy $f \in \mathbb{F}_p[X]$ irreducibilis polinom pontosan akkor osztja $X^{p^n} - X$-et, ha $\deg(f)|n$.
   (2) Igazoljuk, hogy $\mathbb{F}_p[X]$-ben

$$X^{p^n} - X = \prod_{f \in I} f\;,$$

   ahol I azon $\mathbb{F}_p[X]$-beli irreducibilis polinomok halmaza, amelyek egy főegyütthatósak és fokszámuk n osztója.

4. ** Rögzítsük az $\mathbb{F}_p$ test egy $\overline{\mathbb{F}}_p$ algebrai lezártját. Mutassunk olyan automorfizmusát $\overline{\mathbb{F}}_p$-nek, amely nem a Frobenius-homomorfizmus egy hatványa.

5. * Legyenek X,X_i topologikus terek. Ekkor
   (1) ha X teljesen összefüggéstelen, akkor minden altere is az;
   (2) $\prod X_i$ pontosan akkor teljesen összefüggéstelen, ha minden i-re X_i teljesen összefüggéstelen.

6. Igazoljuk, hogy a topologikus csoportok kategóriájában minden inverz rendszernek van limesze.

Definíció: Egy G topologikus csoportot *provéges* csoportnak hívunk, ha egy diszkrét véges csoportokból álló inverz rendszer projektív limesze.

7. ** Legyen G topologikus csoport. Mutassuk meg, hogy G pontosan akkor provéges, ha kompakt és teljesen összefüggéstelen.

8. Legyen G kompakt topologikus csoport, G° az egységelem összefüggőségi komponense. Mutassuk meg, hogy G° összefüggő kompakt topologikus csoport amely megegyezik G összes nyílt normálosztójának a metszetével, továbbá igazoljuk, hogy G/G° provéges.