Galois-elmélet / 2006 tavasz

8. Házi feladat

1. * Legyen K tetszőleges test, $\Phi_n(X) \in K[X]$ az n-edfokú körosztási polinom K felett. Mutassuk meg, hogy

(1) $\Phi(X)$ egy $\phi(n)$-edfokú szeparábilis polinom, amelyre

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d \ ;$$

(2) A $K = \mathbb{Q}$ esetben $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, és Φ_n irreducibilis $\mathbb{Z}[X]$ felett.

2. Legyen $\xi_m \in \overline{\mathbb{Q}}$ egy primitív m-edik egységgyök. Milyen n-ekre lesz Φ_n irreducibilis $\mathbb{Q}(\xi_m)$ felett?

3. Igazoljuk az alábbi azonosságokat a körosztási polinomokra:

(1) ha p prím, $r > 0$, akkor $\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}})$;

(2) minden m páratlan szám esetén $\Phi_{2m}(X) = \Phi_m(-X)$;

(3) ha p prím, $p \not| n$, akkor

$$\Phi_{pn}(X) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)} \ .$$

Definíció: Legyen G tetszőleges csoport, K test. Egy $\chi : G \to K^*$ homomorfizmust G *egy K-értékű karakteré*nek nevezünk.

4. * (E. Artin) Legyen G egy csoport, $\chi_1, \ldots, \chi_n$ a G csoport K-beli karakterei. Igazoljuk, hogy $\chi_1, \ldots, \chi_n$ lineárisan függetlenek a $\mathrm{Fun}(G, K)$ vektortérben (ez a G-ből K-ban menő függvények K feletti vektortere).

5. Legyen Z_n egy n-elemű ciklikus csoport, $\mathbb{F}$ véges test, Hány $\mathbb{F}$-beli karaktere van Z_n-nek?