Galois-elmélet / 2006 tavasz

9. Házi feladat

1. Határuzzuk meg az összes egységgyököt, amelyek a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$, illetve a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ testek elemei.

2. Számoljuk ki az $X^5 - 1 \in \mathbb{F}_7[X]$ polinom Galois-csoportját.

Definíció: Legyen L/K véges testbővítés, $a \in L$. Tekintsük L-nek a

$$\phi_a : L \to L \ , \ x \mapsto ax$$

K-endomorfizmusát. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{L/K}(a) &\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(\phi_a) \ , \\ \mathrm{Nm}_{L/K}(a) &\overset{\mathrm{def}}{=} \det(\phi_a) \ , \end{aligned}$$

az a elem *nyoma*, illetve *normája* L/K-ban.

3. * Legyen L/K n-edfokú bővítés, $a \in L$. Ekkor
   (1) ha $a \in K$, akkor
$$\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = na \ , \ \mathrm{Nm}_{L/K}(a) = a^n \ ;$$
   (2) ha $L = K(a)$, a minimálpolinomja K felett $X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_n$, akkor
$$\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = -c_1 \ , \ \mathrm{Nm}_{L/K}(a) = (-1)^n c_n \ .$$

4. * Legyen L/K véges testbővítés, $a \in L$, $s \overset{\mathrm{def}}{=} [L : K(a)]$. Ekkor
$$\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = s \cdot \mathrm{Tr}_{K(a)/K}(a) \ , \ \mathrm{Nm}_{L/K}(a) = (\mathrm{Nm}_{K(a)/K}(a))^s \ .$$

5. Írjuk le a $\left\{ a \in L \,|\, \mathrm{Tr}_{L/K}(a) = 0 \right\}$ halmazt, ha L/K n-edfokú véges testbővítés.

6. Legyenek $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$ véges testek. Határozzuk meg a kapcsolódó normaleképezés képét és magját.

7. Legyen K tetszőleges test, $L = K(a)$ egyszerű algebrai bővítés $f \in K[X]$ minimálpolinommal. Mutassuk meg, hogy
$$f(x) = \mathrm{Nm}_{L/K}(x - a)$$
minden $x \in K$ esetén.

8. ** Legyen L/K véges Galois-bővítés, $x_1, \ldots, x_n$ egy K-bázisa L-nek. Ekkor minden $H \leqslant \mathrm{Gal}(L/K)$ esetén
$$L^H = K(\mathrm{Tr}_{L/L^H}(x_1), \ldots, \mathrm{Tr}_{L/L^H}(x_n)) \ .$$