3. Házi feladat

1. * Legyen $\phi : X \to Y$ egy algebrai halmazok közti reguláris leképezés. Mutassuk meg, hogy $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ pontosan akkor injektív, ha $\phi(X) \subseteq Y$ sűrű, illetve pontosan akkor szürjektív, ha ϕ egy izomorfizmus Y egy algebrai részhalmazával.

2. Legyen R tetszőleges gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy R prímideáljainak a halmazában vannak a tartalmazásra nézve minimális elemek.

3. Egy R gyűrűt *Boole-gyűrű*nek hívunk, ha minden $r \in R$ elemére $r^2 = r$. Igazoljuk, hogy
   (1) R minden prímideálja maximális, és a szerinte vett faktor egy kételemű test;
   (2) minden végesen generált R-beli ideál főideál.

4. Mutassuk meg, hogy bármely R gyűrű esetén az alábbiak ekvivalensek:
   (1) $\operatorname{Spec} R$ nem összefüggő,
   (2) $R \simeq R_1 \times R_2$,
   (3) R tartalmaz $0, 1$-től különböző idempotens elemet.

Definíció: Legyen (X, τ) topologikus tér, $Z \subseteq X$ egy irreducibilis zárt halmaz. A $z \in Z$ pontot Z egy *általános pontjának* nevezzük, ha

$$\overline{\{ z \}} = Z \ .$$

Az X topologikus teret *Zariski-tér*nek nevezzük, ha noether, és minden nemüres irreducibilis zárt részhalmazának van pontosan egy általános pontja.

5. * Bizonyítsuk be az alábbiakat:
   (1) Egy Zariski-tér minimális nem üres zárt halmaza egy pontból áll.
   (2) Egy Zariski-tér mindig T_0.
   (3) Ha X egy irreducibilis Zariski-tér, akkor X általános pontja minden (nem üres) nyílt halmazban benne van.
   (4) Ha R Noether-gyűrű, akkor $\operatorname{Spec} R$ Zariski-tér.

6. Legyenek $I, J, K \subseteq R$ tetszőleges ideálok. Mutassuk meg, hogy $I(J + K) = IJ + IK$.

7. ** (Hochster 1969) Egy (X, τ) topologikus térhez pontosan akkor létezik olyan R gyűrű, amelyre $X \approx \operatorname{Spec} R$, ha
   (1) X egy T_0 tér,
   (2) X kompakt, az X-beli kompakt nyílt halmazok zártak a véges metszetekre, továbbá τ egy bázisát alkotják,
   (3) Minden $Z \subseteq X$ irreducibilis zárt részhalmaznak van általános pontja.

8. (i) Legyen $I \subseteq R$ olyan ideál, ami a tartalmazásra nézve maximális a *nem* végesen generált ideálok között. Mutassuk meg, hogy I prímideál.
(ii) * Igazoljuk, hogy egy olyan ideál, ami maximális a *nem* főideálok között, mindig prím.

9. (i) Ha $P_1, \ldots, P_n \subseteq R$ prímideálok, $I \subseteq \cup_{i=1}^{n} P_i$ tetszőleges ideál. Ekkor létezik olyan $1 \leq i \leq n$ index, amelyre $I \subseteq P_i$.
(ii) Legyenek most $I_1, \ldots, I_m \subseteq R$ tetszőleges ideálok, $P \supseteq \cap_{i=1}^{m} I_i$ prímideál. Igazoljuk, hogy $P \supseteq I_i$ valamely $1 \leq i \leq m$-re.

Definíció: Legyenek $I, J \subseteq R$ tetszőleges ideálok. Ekkor az $(I : J) \subseteq R$ *hányadosideál*t az alábbi módon definiáljuk:

$$(I : J) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in R \,|\, xJ \subseteq I \} \ .$$

10. (Hányadosideálok tulajdonságai). Tetszőleges $I, J, K \subseteq R$ ideálok esetén igazoljuk az alábbiakat:
   (1) $(I : J) \subseteq R$ valóban egy ideál;
   (2) $(I : J)J \subseteq I$,
   (3) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$,

(4) $(I \cap J : K) = (I : J) \cap (J : K)$,
(5) $(I : J + K) = (I : J) \cap (I : K)$.

11. Ha $(m), (n) \subseteq \mathbb{Z}$ tetszőleges ideálok, akkor mi lesz $((m) : (n))$?

12. Legyen $f : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, $I, I_1, I_1 \subseteq R$, $J, J_1, J_2 \subseteq S$ ideálok. Ekkor
(1) $I \subseteq I^{ec}$, $J \supseteq J^{ce}$, $J^c = J^{cec}$, $I^e = I^{ece}$,
(2) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$, $(J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$,
(3) $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$, $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$,
(4) $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$, $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$,
(5) $(I_1 : I_2)^e \subseteq (I_1^e : I_2^e)$, $(J_1 : J_2)^c \subseteq (J_1^c : J_2^c)$,
(6) $\mathrm{Rad}(I)^e \subseteq \mathrm{Rad}(I^e)$, $\mathrm{Rad}(J)^c = \mathrm{Rad}(J^c)$.

13. Mutassuk meg, hogy ha $x \in R$ nilpotens, akkor $1 + x \in R^\times$.

14. Legyen R tetszőleges gyűrű, és tekintsük az egyváltozós polinomok $R[x]$ gyűrűjét. Igazoljuk az alábbiakat: ha $f = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 \in R[x]$, akkor
(1) $f \in R[x]^\times$ pontosan akkor, ha $a_0 \in R^\times$ és $a_1, \dots, a_n$ mind nilpotens elemek;
(2) f pontosan akkor nilpotens, ha minden együtthatója nilpotens;
(3) f akkor és csak akkor nullosztó, ha létezik olyan $0 \neq b \in R$ elem, amelyre $bf = 0$.
(4) Ha $f, g \in R[x]$ tetszőleges polinomok, akkor f, g primitív[1] $\iff$ fg primitív.

15. Tekintsük az R gyűrű feletti formális hatványsorok $R[[x]]$ gyűrűjét, legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
(1) Mutassuk meg, hogy $f \in R[[x]]^\times$ pontosan akkor, ha $a_0 \in R^\times$.
(2) Lássuk be, hogy ha f nilpotens, akkor minden $n \geq 0$ esetén a_n is nilpotens. Igaz-e a megfordítás?
(3) Egy $\mathfrak{m} \subseteq R[[x]]$ maximális ideál visszahúzása az $R \hookrightarrow R[[x]]$ beágyazás mentén szintén maximális, és $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}^c, x)$.
(4) R minden prímideálja egy $R[[x]]$-beli prím visszahúzottja.

16. Legyen R olyan gyűrű, amelyben minden $x \in R$ elemhez létezik olyan n_x természetes szám, hogy $x^{n_x} = x$. Mutassuk meg, hogy R minden prímideálja maximális.

17. ** Igazoljuk, hogy ha R Noether-gyűrű, n természetes szám, akkor csak véges sok olyan P prímideál létezhet, amelyre $\#R/P \leq n$.

[1] Egy $f \in R[x]$ polinomot *primitív*nek nevezünk, ha az együtthatói által generált ideál az egész gyűrű.