Dr. Alex Küronya Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur "Einführung in die torische Geometrie"

4. Blatt

Abgabetermin: Mi, 15.6.2011

Für die mit $*$ gekennzeichnete Aufgabe sollte man eine schriftliche Lösung bis zum Abgabetermin einreichen.

Auf diesem Übungsblatt beweisen wir viele Tatsachen über konvexe Geometrie, die für torische Geometrie wichtig sind. Währendessen folgen wir dem Buch von Bill Fulton (Abschnitt 1.2).

Aufgabe 4-1
Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel, $v \notin \sigma$. Man zeige, daß es ein Element $u \in \sigma^{\vee} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ gibt, für welche $\langle u, v \rangle < 0$ ist.

Aufgabe 4-2
Ist $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel, dann gilt $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$.

Aufgabe 4-3
Ein linearer Unterraum eines Kegels ist in jedem Seitenflächen des Kegels enthalten ist.

Aufgabe 4-4
Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel, $\tau \subseteq \sigma$ eine Seitenfläche. Man zeige, daß auch $\tau \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel ist.

Aufgabe 4-5
Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel, $\tau_1, \ldots, \tau_r \subseteq \sigma$ Seitenflächen. Man beweise, daß auch $\tau_1 \cap \cdots \cap \tau_r$ eine Seitenfläche von σ ist.

Aufgabe 4-6
Man beweise, daß eine Seitenfläche einer Seitenfläche eines Kegels (konvex, polyhedral) σ eine Seitenfläche von σ ist.

Aufgabe 4-7
Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel, $\tau \subsetneq \sigma$ eine Seitenfläche. Man zeige, daß es eine Facette $\mu \subseteq \sigma$ mit $\tau \subseteq \mu$ gibt. Man beweise auch, daß

$$\tau = \bigcap_{\mu \supseteq \tau, \mu \text{ eine Facette von } \sigma} \mu \ .$$

Aufgabe 4-8
Es sei $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel mit der Eigenschaft $\mathrm{Span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$, $\tau \subseteq \sigma$ eine Facette. Man zeige, daß es einen (bis auf Multiplikation mit positiven reellen Zahlen) eindeutig bestimmten Vektor $u_\tau \in \sigma^\vee$ gibt, für welchen $\tau = \sigma \cap H_{u_\tau}$ gilt.

Aufgabe 4-9
Ist $\sigma \subsetneq N_{\mathbb{R}}$ ein konvexer polyhedraler Kegel mit $\mathrm{Span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$, dann gilt es

$$\sigma \;=\; \cap_{\tau \text{ eine Facette von } \sigma} H^+_{u_\tau} \;.$$

Aufgabe 4-10
Man beweise, daß der duale Kegel $\sigma^\vee$ zu einem konvexen polyhedralen Kegel is ebenfalls konvex polyhedral ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 4-11
Man nehme einen konvexen Polyhedralen Kege $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$, so daß $\mathrm{Span}(\sigma) = N_{\mathbb{R}}$. Dann ist der topologische Rand von σ gleich der Vereinigung allen eigentlichen Seitenflächen von σ.

Aufgabe 4-12 *
Es sei σ ein konvexer polyhedraler Kegel, $\tau \subseteq \sigma$ eine Seitenfläche. Man beweise die folgende:

(1) $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ ist eine Seitenfläche von $\sigma^\vee$;
(2) $\dim \tau + \dim(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) \;=\; \dim V$;
(3) die Zuordnung $\tau \mapsto \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ zwischen der Seitenflächen von σ und $\sigma^\vee$ ist bijektiv und inklusionsumkehrend;
(4) die kleinste Seitenfläche von σ ist $\sigma \cap (-\sigma)$.

Aufgabe 4-13
Die folgende Eigenschaften sind für einen konvexen polyhedralen Kegel σ äquivalent:

(1) σ ist stark konvex.
(2) σ enthält keinen positiv-dimensionalen affinen Unterraum von $N_{\mathbb{R}}$.
(3) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.
(4) $\dim \sigma^\vee = n = \dim M_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 4-14
Es seien $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq N_{\mathbb{R}}$ konvexe polyhedrale Kegel, die sich in einer gemeinsamen Seitenfläche $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ schneiden. Man zeige, daß

$$\tau \;=\; H_m \cap \sigma_1 \;=\; H_m \cap \sigma_2$$

für alle $m \in \mathrm{Relint}(\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee)$.

Aufgabe 4-15
Es sei M ein Gitter, $S \subseteq M_{\mathbb{R}}$ eine endliche Untermenge. Man beweise die folgende.

(1) Ist $S \subseteq M$, dann gilt $\mathrm{rank}\, \mathbb{Z}S = \dim \mathrm{Span}(S)$.
(2) $\dim \mathrm{Cone}(S) \;=\; \dim \mathrm{Span}(S)$.