Oliver Fabert/Alex Küronya
Patrick Graf

7. Mai 2012
Blatt 3

Übungen zu „Geometrie und Algebra vollständig integrabler Systeme“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 15. Mai, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 10 Sei S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Die symplektische Standardform ω ist gegeben durch

$$\omega_u(v, w) = \langle u, v \times w \rangle,$$

wobei $u \in S^2$ und $v, w \in T_u S^2$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind, $\times$ das Kreuzprodukt ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Betrachten Sie zylindrische Polarkoordinaten (ϑ, z) auf S^2 außerhalb von Nord- und Südpol, wobei $0 \leq \vartheta < 2\pi$ und $-1 < z < 1$. Zeigen Sie, daß in diesen Koordinaten gilt:

$$\omega = \mathrm{d}\vartheta \wedge \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 11 Sei $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ der $2n$-dimensionale symplektische euklidische Standardraum. Die *symplektische lineare Gruppe* $\mathrm{Sp}(2n)$ ist die Gruppe aller symplektischen $2n \times 2n$-Matrizen. Wir identifizieren eine komplexe $n \times n$-Matrix $X + \mathrm{i}Y$ mit der reellen $2n \times 2n$-Matrix $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Mit Hilfe dieser Identifikation können wir die folgenden Untergruppen der $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ betrachten:

$$\mathrm{Sp}(2n),\ \mathrm{O}(2n),\ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ \text{und}\ \mathrm{U}(n).$$

Zeigen Sie, daß der Schnitt von je zwei von diesen gleich $\mathrm{U}(n)$ ist.

Aufgabe 12 Für zwei symplektische Mannigfaltigkeiten (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) sei ein Diffeomorphismus $\psi\colon M_1 \to M_2$ gegeben. Beweisen Sie, daß ψ genau dann ein Symplektomorphismus ist, wenn der Graph $L_\psi := \{(x, \psi(x)) \mid x \in M_1\}$ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von $(M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$ ist.

Aufgabe 13 Sei X eine Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form μ auf X kann man als Abbildung $\mu : X \to T^*X$ auffassen. Insbesondere kann man Differentialformen auf T^*X längs μ zurückziehen.

a) Zeigen Sie, daß sich die kanonische 1-Form α auf dem Kotangentialbündel T^*X eindeutig durch die Eigenschaft charakterisieren läßt, daß $\mu^*\alpha = \mu$ für jede 1-Form μ auf X.

b) Folgern Sie, daß der Graph einer 1-Form μ genau dann eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit des Kotangentialbündels ist, wenn μ geschlossen ist.