Oliver Fabert/Alex Küronya
Patrick Graf

4. Juni 2012
Blatt 6

**Übungen zu „Geometrie und Algebra vollständig integrabler Systeme"**

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 12. Juni, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

**Aufgabe 22** Zeigen Sie, daß die Funktion $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \log(|z|^2 + 1),$$

streng plurisubharmonisch ist. Folgern Sie, daß die 2-Form

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{\mathrm{i}}{2} \partial\overline{\partial} \log(|z|^2 + 1)$$

eine Kählerform ist. Man nennt $\omega_{\mathrm{FS}}$ die *Fubini–Study-Form* auf $\mathbb{C}^n$.

**Aufgabe 23** Sei $U = \{z_1 \neq 0\} \subset \mathbb{C}^n$, und sei $\varphi\colon U \to U$ die Abbildung

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \frac{1}{z_1}(1, z_2, \dots, z_n).$$

Zeigen Sie, daß gilt:

$$\varphi^* \log(|z|^2 + 1) = \log(|z|^2 + 1) + \log \frac{1}{|z_1|^2}.$$

**Aufgabe 24** Folgern Sie: $\varphi^* \omega_{\mathrm{FS}} = \omega_{\mathrm{FS}}$.

*Hinweis:* Benutzen Sie, daß $\log \frac{1}{|z_1|^2} = -\log z_1 - \log \overline{z_1}$.

**Aufgabe 25** Betrachten Sie den $n$-dimensionalen komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ mit den Standardkarten $\varphi_i\colon U_i = \big\{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid z_i \neq 0\big\} \to \mathbb{C}^n$,

$$[z_0 : \dots : z_n] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right).$$

Zeigen Sie, daß $\varphi_0^* \omega_{\mathrm{FS}}$ und $\varphi_1^* \omega_{\mathrm{FS}}$ auf $U_0 \cap U_1$ übereinstimmen. Folgern Sie, daß es auf $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ genau eine Kählerform $\omega_{\mathrm{FS}}$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\omega_{\mathrm{FS}}|_{U_i} = \varphi_i^* \omega_{\mathrm{FS}}$.

Man nennt $\omega_{\mathrm{FS}}$ die *Fubini–Study-Form* auf $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.