Dr. Alex Küronya Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Gruppenwirkungen auf algebraischen Varietäten"

2. Blatt

Abgabetermin: Fr, 10.5.2013

Aufgabe 2-1 Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit $A^d = \mathrm{Id}$ für eine positive ganze Zahl d. Man beweise, daß A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2-2 Eine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ einer endlichen Gruppe heißt *irreduzibel*, wenn V keinen echten ρ-invarianten Unterraum besitzt. Man bestimme die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe auf 3 Elementen.

Aufgabe 2-3 Man schreibe das Polynom $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen

$$\begin{aligned} e_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ e_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2-4 Man schreibe das Polynom

$$\prod_{1 \le i < j \le 3} (x_i - x_j)^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$$

als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen e_1, e_2, e_3 in drei Variablen.

Aufgabe 2-5 (Schur's Lemma) Es sei G eine endliche Gruppe, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\tau : G \to \mathrm{GL}(W)$ irreduzible Darstellungen. Es sei $\phi : V \to W$ Homomorphismus von Darstellungen, sprich eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit der Eigenschaft, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & W \arrow[d, "\tau(g)"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

für jedes $g \in G$ kommutiert.

Man zeige, daß ϕ entweder ein Isomorphismus oder gleich Null ist.