M1c Differenciálegyenletek gyakorlatok

(Gyakran a Tóth J.–Simon P.: Diff. egyenletek könyvből való a példa, jel.: [T-S].)

1. gyakorlat: Kis ismétlés integrálásból. Szétválasztható KDE-k.

Kis ismétlés integrálásból. Pár fontos típus címszavakban:

1. Elemi függvények primitív függvényei:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\text{ha } \alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c_\pm, \qquad \int e^x\,dx = e^x + c,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c.$$

2. Lineáris helyettesítés: $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + c$, ha $a \neq 0$ és $F' = f$.

Példák: $\displaystyle\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln|2x+3| + c, \qquad \int \frac{1}{4-x}\,dx = -\ln|4-x| + c,$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} + c, \qquad \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c.$$

3. Nevezőben polinom:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\,\ln|ax+b| + c;$$
$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right)dx = \frac{1}{a-b}\,\underbrace{\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|}_{\ln|x-a|-\ln|x-b|} + c,$$

spec. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$ mivel $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$.

4. Parciális integrálás: $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$.

Pl.: $\displaystyle\int \underbrace{x\,e^x}_{=(e^x)'\,x}\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c.$

Szétválasztható KDE-k.

0. Elemi feladatok: $\dot{x}(t) = v$ állandó, ill. $\ddot{x}(t) = a$ állandó [T-S 24. old.].

Megoldás: $x(t) = vt + c$, ill. $x(t) = \frac{a}{2}\,t^2 + c_1 t + c_2$.

Fizikai jelentés: egyenletes ill. egyenletesen gyorsuló mozgás.

Szétválasztható KDE fogalma:

$$y'(x) = h\big(y(x)\big)\,g(x).$$

Megoldási módszer: "dx"-es formalizmussal. (Ennek jogosságát az előadáson látott precíz levezetés adja, amit itt nem használunk.)

1. lépés: konstans megoldások keresése. Ilyenkor $y'(x) \equiv 0$, így a $0 \equiv h\big(y(x)\big)\,g(x)$ egyenletből fejezzük ki az $y(x) \equiv c$ megoldásokat.

2. lépés. Átírjuk a KDE-t "dx"-es formalizmussal: $y'(x)$ helyett $\frac{dy}{dx}$-et írunk és y-t is változóként kezeljük. Ezután feltesszük, hogy $h(y) \neq 0$ egy I intervallumon, és osztunk vele. Ezekkel

$$\frac{dy}{dx} = h(y)g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx.$$

Integrálás után egy $H(y) = G(x) + c$ alakú egyenletet kapunk ($c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans), amiből ki kell fejeznünk y-t x függvényeként.

Gyakori speciális eset az *autonóm KDE*: $y'(x) = h\big(y(x)\big)$. Ez a fenti típusú, ha $g(x) := 1$.

Sokszor a változó nem x, hanem t (idő), ekkor $\frac{dy}{dt}$-vel dolgozunk.

Feladatok.

1. Baktériumok korlátlan szaporodása [T-S 22. old.]:

$$y'(t) = Ky(t),$$

ahol $K > 0$ állandó és csak az $y \geq 0$ megoldásokat keressük. Adjuk meg az általános megoldást! Oldjuk meg $y(0) = y_0$ kezdeti feltétellel is.

Megoldás.

- Konstans megoldás: $0 = Ky(t) \;\Rightarrow\; y(t) \equiv 0$ (azaz ha nincs bakt., de ez nem túl érdekes).
- Érdemi eset: ha $y > 0$. Ekkor:

$$\frac{dy}{dt} = Ky \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = K dt \quad \Leftrightarrow \quad \text{integrálva:} \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int K\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln y = Kt + c, \;\text{ ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.} \quad (\text{most nem kell } \ln|y|, \text{ mert } y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{Kt+c} = e^c e^{Kt} = c_1 e^{Kt}, \;\text{ ahol } c_1 > 0 \text{ tetsz.}$$

Az 1-2. eseteket egyesítve $c_1 \geq 0$ tetsz., és itt c_1 helyett c betű is írható. Összefoglalva, valamint feltüntetve, hogy y valójában függvénye a t változónak, az *általános megoldás* az alábbi függvényhalmaz:

$$y(t) = c\, e^{Kt}, \qquad \text{ahol } c > 0 \text{ tetszőleges.}$$

Megoldás az $y(0) = y_0$ kezdeti feltétellel: ekkor a fenti képletből $y_0 = c\, e^{K\cdot 0}$, azaz $c = y_0$, tehát

$$y(t) = y_0\, e^{Kt}.$$

2. Oldatok. Egy tartályban 10 l víz van, percenként 2 l 30%-os sóoldat ömlik be és 2 l elkevert oldat folyik ki. Ekkor a só $y(t)$ mennyiségére

$$y'(t) = 0.6 - 0.2\, y(t),$$

mert 0.6 l/perc folyik be és a só 0.2 része folyik ki. [T-S. 80. old.]

(a) Adjuk meg az általános megoldást!
Mutassuk meg, hogy közös egyensúlyi helyzethez (a konstans megoldáshoz) tartanak, ha $t \to \infty$!

Megoldás.

- Konstans megoldás: $0 = 0.6 - 0.2\,y(t) \;\Rightarrow\; y(t) \equiv 3.$ (Ez a rendszer dinamikus egyensúlyi helyzete.)

- Tegyük fel, hogy $y(t) \neq 3$. Ekkor:

$$\frac{dy}{dt} = 0.6 - 0.2\,y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{3-y} = 0.2\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \text{integrálva:} \quad \int \frac{1}{3-y}\,dy = \int 0.2\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad -\ln|3-y| = 0.2\,t + c, \ \text{ ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}$$

$$\Leftrightarrow \quad |3-y| = e^{-0.2\,t-c} = c_1\,e^{-0.2\,t}, \ \text{ ahol } c_1 > 0 \text{ tetsz.}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3-y = \pm c_1\,e^{-0.2\,t}, \ \text{ azaz } \ y = 3 + c_2\,e^{-0.2\,t}, \ \text{ ahol } c_2 := \mp c_1 \text{ tetsz.}$$

Az 1-2. eseteket egyesítve $c_2 \in \mathbb{R}$ tetsz. és itt c_2 helyett c is írható. Összefoglalva, az általános megoldás:

$$y(t) = 3 + c\,e^{-0.2\,t} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

Mivel $t \to \infty$ esetén $e^{-0.2\,t} \to 0$, így bármely megoldásra $y(t) \to 3$. (Azaz bármely állapotból indulva hosszú idő után kb. 3 l lesz az oldott só térfogata.)

(b) Ha a kezdőpillanatban a vízben nincs só, azaz $y(0) = 0$, akkor mennyi só lesz 5 perc múlva?

Megoldás: a fenti képletből $0 = y(0) = 3 + c\,e^{-0.2\cdot 0} = 3 + c$, azaz $c = -3$. Így a megoldás $y(t) = 3 - 3\,e^{-0.2\,t}$. Ebből $y(5) = 3 - 3\,e^{-0.2\cdot 5} = 3 - \frac{3}{e} \approx 1.896$ l lesz az oldott só térfogata.

3. Baktériumok korlátozott szaporodása egy M eltartóképességű területen [T-S 22. old.]: $y'(t) = Ky(t)\big(M - y(t)\big)$, ahol $K, M > 0$ állandók és csak a $0 \le y \le M$ megoldásokat keressük. Adjuk meg az általános megoldást, és ábrázoljuk is a grafikonjaikat!

- 1. lépés: konstans megoldások $y(t) \equiv 0$ (nincs bakt.) és $y(t) \equiv M$ (egyensúlyi állapot).
- 2. lépés: ha $0 < y(t) < M$, akkor

$$\frac{dy}{dt} = Ky(M-y) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{y(M-y)} = K\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dy}{y(y-M)} = -K\,dt.$$

Integrálunk: a bal oldal nevezője y-nak másodfokú polinomja, így a ma tanult képlet használható $a = M$ és $b = 0$ mellett, ahol most $0 < y < M$ miatt az abszolút érték felbontható:

$\frac{1}{M}\ln\frac{M-y}{y} = -Kt + c \quad (c \in \mathbb{R}$ tetsz.) Ebből kell kifejeznünk y-t:

$\frac{M-y}{y} = e^{-KMt+c_1} = c_2\,e^{-KMt} \quad (c_2 > 0$ tetsz.) Ez y-nal szorozva lineáris egyenlet. Ezt megoldva, a t változót beírva és c_2 helyett c-vel: $\quad y(t) = \frac{M}{1 + c\,e^{-KMt}} \quad (c > 0$ tetsz.)

Grafikonon: y időben növő függvény, amely $t \to \infty$ esetén tart az M eltartóképességhez.

4. Oldjuk meg az alábbi nem autonóm egyenleteket!

(a) $y'(x) = \dfrac{y^2(x)}{x^2}$;

(b) $E'(r) = -\frac{2}{r}\,E(r)$ (itt $E(r) > 0$ egy térbeli tömegpont erőterének nagysága r távolságban).

Megoldások.

(a) Konstans megoldás: $y(x) \equiv 0$.

Ha $y(x) \neq 0$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y^{-2}\,dy = x^{-2}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int y^{-2}\,dy = \int x^{-2}\,dx$

$\Leftrightarrow \quad -y^{-1} = -x^{-1} + c \quad (c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}), \quad$ így $\quad y(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x} - c} \quad (c \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$

(b) Konstans megoldás: nincs, mert csak $E(r) \equiv 0$ lehetne.

$E(r) > 0$ mellett: $\dfrac{dE}{dr} = -\dfrac{2E}{r} \quad \Leftrightarrow \quad E^{-1}\,dE = -2r^{-1}\,dr \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int E^{-1}\,dE = -2\int r^{-1}dr$

$\Leftrightarrow \quad \ln E = -2\ln r + c \quad (c \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad E = c_1 r^{-2} \quad (c_1 > 0)$.

Végül is: $E(r) = \frac{c}{r^2}$, ahol $c > 0$ tetsz. (mivel a pont tömegét nem adtuk meg).

Házi feladatok.

1. Egy radioaktív izotóp bomlási sebessége egyenesen arányos a meglévő tömeggel, így a t idő függvényében a tömeg $N(t)$ értékét az $N'(t) = -\lambda N(t)$ egyenlet határozza meg, ahol $\lambda > 0$ az ún. bomlási állandó [T-S 79. old.].

   (a) Adjuk meg a fenti egyenlet általános megoldását! (Itt $N(t) > 0$.)

   (b) Mutassuk meg, hogy értelmes a felezési idő fogalma, azaz van olyan $T > 0$ időtartam, hogy bármely $t > 0$ esetén az $y(t+T)$ érték épp fele az $y(t)$ értéknek! Fejezzük ki T értékét λ-val!

   (c) Ha az időt órában mérjük, $\lambda = 10^{-3}$ és a kezdeti tömeg $N(0) = 271$ kg, mennyi lesz az $N(t)$ tömeg 1000 óra múlva?

   (d) Ha a rádium felezési ideje 1600 év, hány éves az a minta, amelynek vizsgálata alapján a kiindulási anyag 4.2%-a bomlott el?

2. Fényelnyelés hatására egy homogén oldatba belépő fény intenzitása a megtett úttal arányosan csökken, éspedig az $I'(x) = -kcI(x)$ egyenlet szerint alakul, ahol $I(x)$ a fény intenzitása x út megtétele után az oldatban, és $k, c > 0$ állandók (c a koncentráció, k arányossági tényező). Jelölje $I_0 := I(0) > 0$ a belépéskor mért kezdeti intenzitást. [T-S. 80. old.]

   (a) Számítsuk ki $I(x)$-et!

   (b) Ha a fénysugár d út megtétele után lép ki az oldatból I_1 intenzitással, akkor igazoljuk az $\ln \frac{I_0}{I_1} = kcd$ összefüggést (Lambert-Beer-törvény)!

3. Modellezzük egy $x(t)$ függvénnyel egy nagy halastóban a nagyméretű halpopulációt az idő függvényében. Tegyük fel, hogy "lehalászás" nélkül a vizsgált időtartamban az $\dot{x}(t) = Kx(t)$ egyenlet szerinti korlátlan szaporodási modell érvényesülne. Ha $H > 0$ állandó halászati kvótát engedélyeznek, akkor az egyenlet $\dot{x}(t) = Kx(t) - H$ alakú lesz. Legyen a $t = 0$ kezdeti időpontban a halak mennyisége $x(0) =: x_0$. Mekkora H kvóta engedélyezhető az x_0 kezdetiérték és a $K > 0$ szaporodási ráta függvényében, hogy ne pusztuljanak ki a halak, azaz $x(t)$ értéke pozitív korlát fölött maradjon minden $t > 0$ esetén?

4. Egy test lehűlési sebessége egyenesen arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével, azaz $T'(t) = K\left(T_k - T(t)\right)$, ahol $K > 0$ és $T_k > 0$ állandók. (Itt $T(t)$ és T_k rendre a t időpontbeli és a külső állandó hőmérséklet, az időt percekben mérjük). Ha egy kenyér kezdetben 120°C-os, a levegő $T_k = 30$°C-os és $K = 0,0366$, mekkora lesz a kenyér hőmérséklete 60 perc múlva?

5. A szabadon eső test sebességére $m\dot{v}(t) = mg - kv^2(t)$, ahol $m, g, k > 0$ állandók.

   (a) Adjuk meg az általános megoldást!

   (Megj.: a csúnya konstansok elkerülésére jelöljük az elején kapott konstans megoldást v_*-gal. Ekkor a beosztás után a $\dfrac{dv}{v^2 - v_*^2} = -\dfrac{k}{m}\,dt$ egyenletet kell integrálni.)

   (b) Mutassuk meg, hogy $v(t) \to v_*$, ha $t \to +\infty$, azaz a sebesség hosszú idő után kb. állandó!

6. Az $y'(t) = y^{1+p}(t)$ egyenlet ($p > 0$ állandó) egy anyag $y(t) > 0$ koncentrációját jellemzi az idő függvényében. Ez olyan autokatalitikus kémiai reakciót ír le, melyben az anyag lineárisnál gyorsabb mértékben gerjeszti önmagát. Mutassuk meg, hogy az anyag ilyenkor véges időn belül "felrobban", azaz bármely y megoldás esetén van olyan $T > 0$, hogy $\lim\limits_{t \to T^-} y(t) = +\infty$!

7. Oldjuk meg az alábbi nem autonóm egyenleteket:

   (a) $y'(x) = \dfrac{x^2}{y^3(x)}$;

   (b) a 6. feladatban $p = 3$ mellett periodikus fényhatás is érvényesül, pl. $y'(t) = y^4(t)\,(1 + \cos 2t)$.

A házi feladatok eredményei.

1. (a) $N(t) = c\,e^{-\lambda t}$ $\quad (c > 0$ tetsz.)

   (b) Bármely $t > 0$ esetén $c\,e^{-\lambda(t+T)} = \frac{1}{2}c\,e^{-\lambda t} \;\Leftrightarrow\; 2\,e^{-\lambda t}e^{-\lambda T} = e^{-\lambda t} \;\Leftrightarrow\; 2 = e^{\lambda T} \;\Leftrightarrow\; T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

   (c) $N(t) = N(0)\,e^{-\lambda t}$, így $N(1000) = 271\,e^{-1} \approx 99.7$ kg.

   (d) A (b) feladat alapján $1600 = \frac{\ln 2}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0.00043$. Ha a minta kora t, akkor $N(t)$ 95.8%-a $N(0)$-nak, így az $N(t) = N(0)\,e^{-\lambda t}$ képlet miatt $0.958 = e^{-\lambda t} \approx e^{-0.00043t}$. Ebből : $0.00043\,t = -\ln 0.958 \approx 0.043$, azaz a minta kb. 100 éves.

2. (a) $I(x) = I_0\,e^{-kcx}$.

   (b) $I_1 = I_0\,e^{-kcd}$, azaz $\frac{I_0}{I_1} = e^{kcd}$, ennek logaritmusát véve megkapjuk a keresett törvényt.

3. A KDE és megoldása hasonló a gyak. 2. feladatához, csak most $x(t)$ együtthatója pozitív.

   Általános megoldás: $x(t) = \frac{H}{K} + c\,e^{Kt}$ $\quad (c \in \mathbb{R}$ tetsz.)

   A kezdeti feltétellel: $x_0 = \frac{H}{K} + c$, így $x(t) = \frac{H}{K} + \left(x_0 - \frac{H}{K}\right)e^{Kt}$.

   Ez akkor marad a $\frac{H}{K}$ érték fölött, ha $x_0 \geq \frac{H}{K}$, hiszen pont ekkor a szig. növő e^{Kt} függvény együtthatója nemnegatív. Ellenkező esetben a populáció szig. csökken, amíg eléri a 0 értéket. Az engedélyezhető kvóták tehát a $H \leq Kx_0$ értékek.

4. A KDE és megoldása hasonló a gyak. 2. feladatához.

   Általános megoldás: $T(t) = T_k + c\,e^{-Kt} = 30 + c\,e^{-0{,}0366\,t}$ $\quad (c \in \mathbb{R}$ tetsz.)

   A kezdeti feltétellel: $120 = 30 + c\,e^{-0{,}0366\cdot 0}$, így $c = 90$ és $T(t) = 30 + 90\,e^{-0{,}0366\,t}$.

   Így $T(60) = 30 + 90\,e^{-0{,}0366\cdot 60} \approx 40$ fokos lesz a kenyér.

5. (a) Konstans megoldás: $v(t) \equiv v_* := \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

   Ha $v(t) \neq v_*$, akkor a nevezőbeli másodfokú polinomot integrálva $\frac{1}{2v_*}\ln\left|\frac{v-v_*}{v+v_*}\right| = -\frac{k}{m}t + c$.

   Ebből v-t kifejezve a megoldás:

   $v(t) < v_*$ esetén $v(t) = v_* \cdot \dfrac{1 - c_2\,e^{-\frac{2v_*k}{m}t}}{1 + c_2\,e^{-\frac{2v_*k}{m}t}}$, ill. $v(t) > v_*$ esetén fönt lesz + és lent −.

   (b) Ha $t \to +\infty$, akkor az exp. tagok 0-hoz tartanak, így a határsebesség v_*.

6. Az $y(t) > 0$ megoldások: $y(t) = \dfrac{1}{(c - pt)^{\frac{1}{p}}}$ $\quad (c > 0$ tetsz.).

   Adott $c > 0$ paraméterhez tartozó $y(t)$ megoldás a $t < \frac{c}{p}$ időintervallumban van értelmezve, és a $T := \frac{c}{p}$ időponthoz közelítve $y(t) \to +\infty$.

7. (a) $y(x) = \pm\left(\frac{4}{3}x^3 + c\right)^{\frac{1}{4}}$ $\quad (c \in \mathbb{R}$ tetsz.);

   (b) $y(t) \equiv 0$ és $y(t) = \dfrac{1}{\left(c - 3t - \frac{3}{2}\sin 2t\right)^{\frac{1}{3}}}$ $\quad (c \in \mathbb{R}$ tetsz.)

2. gyakorlat. *Elsőrendű lineáris KDE. Másodrendű homogén lineáris KDE.*

I. Elsőrendű lineáris KDE-k. Ezek általános alakja:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t). \tag{L}$$

(a) A megoldás menete általános esetben :

- Az $y'(t) = a(t)y(t)$ homogén feladat megoldása: $y_h(t) = ce^{A(t)}$ $\quad$ ($c \in \mathbb{R}$ tetsz.), ahol $A'(t) = a(t)$. (Tehát $A(t) = \int a(t)dt$, ahol elég egy primitív függvény, azaz nem kell $+c$.)
- *Az állandók variálásának módszere:* keressük az (L) egyenlet egy (ún. partikuláris) y_p megoldását

$$y_p(t) = C(t)e^{A(t)}$$

alakban. Ekkor az általános megoldás $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ alakú. (Ha $C(t)$ kiszámításakor meghagyjuk a $+c$ konstanst, akkor egyből a fenti összegalakhoz jutunk.)

Példák.

1. Tegyük fel, hogy a korábbi sóoldatos feladatban a befolyó sómennyiség exponenciálisan csökken. Az egyenlet: $\quad y'(t) = 0.6e^{-t} - 0.2\,y(t)$.

   Megoldás. Itt $a(t) = -0.2$, $b(t) = 0.6\,e^{-t}$.

   - A homogén egyenlet megoldásához $A(t) = \int (-0.2)\,dt = -0.2\,t$ (nem kell $+c$), így

   $$y_h(t) = c\,e^{-0.2t}, \qquad \text{ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges.}$$

   - Az eredeti egyenlet egy megoldását $y_p(t) = C(t)e^{-0.2\,t}$ alakban keressük. A $C(t)$ kiszámításához ezt behelyettesítjük az eredeti egyenletbe:

   $C'(t)e^{-0.2t} - 0.2C(t)e^{-0.2t} = 0.6e^{-t} - 0.2C(t)e^{-0.2t} \;\Rightarrow\; C'(t)e^{-0.2t} = 0.6e^{-t} \;\Rightarrow\; C'(t) = 0.6e^{-0.8t}$.

   Tehát $C(t) = \int 0.6e^{-0.8t}dt = -\frac{3}{4}e^{-0.8t}$ (egy megoldás elég). Azaz $y_p(t) = C(t)e^{-0.2t} = -\frac{3}{4}e^{-t}$ és az általános megoldás:

   $$y(t) = ce^{-0.2t} - \frac{3}{4}e^{-t}, \text{ ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges.}$$

2. $y'(t) = \frac{y(t)}{t} + t$.

   Megoldás. Látható, hogy $t \neq 0$. Tegyük fel, hogy $t > 0$, $\;$ a $t < 0$ eset hasonlóan végigszámolható.

   - A homogén egyenlet megoldásához $A(t) = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t$, így

   $$y_h(t) = c\,e^{\ln t} = ct, \qquad \text{ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges.}$$

   - Az eredeti egyenlet egy megoldását $y_p(t) = C(t)t$ alakban keressük:

   $$C'(t)t + C(t) = C(t) + t \;\Rightarrow\; C'(t) = 1 \;\Rightarrow\; C(t) = t.$$

   Azaz $y_p(t) = t^2$ és az általános megoldás:

   $$y(t) = ct + t^2, \text{ ahol } c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges.}$$

   (A $t < 0$ esetben ugyanez a végeredmény).

(b) A 2. lépés egyszerűsítése $a(t) \equiv k$ állandó együtthatós esetben, azaz ha $y'(t) = k\,y(t) + b(t)$:

ekkor egyes elemi $b(t)$ függvények esetén $y_p(t)$ integrálás nélkül megkapható mint $b(t)$-hez hasonló alakú, de ismeretlen együtthatós függvény, ún. *próbafüggvény*. Az együtthatókat behelyettesítés révén számítjuk ki. (Ugyanezen elvet látjuk majd másodrendű KDE-knél is, ott bővebben.)

Néhány példa próbafüggvényre:

(i) Ha $b(t)$ n-edfokú polinom $\Rightarrow$ $y_p(t)$ is n-edfokú polinom.

(ii) Ha $b(t) = r\cos\beta t + s\sin\beta t \Rightarrow y_p(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$.
(Ha r vagy s nulla, akkor is kell A és B is.)

(iii) Ha $b(t) = re^{\alpha t} \Rightarrow y_p(t) = Ae^{\alpha t}$, ha $\alpha \neq k$;
$y_p(t) = Ate^{\alpha t} = Ate^{kt}$, ha $\alpha = k$.
Az $\alpha = k$ eset az ún. külső rezonancia, amikor $b(t)$ és $Ae^{\alpha t}$ a homogén KDE-nek is megoldásai, így utóbbi nem lehet egyben az inhomogén KDE-nek is megoldása. Szerencsére ekkor a t szorzóval pont jó lesz.

Példa: az előző 1. (sóoldatos) feladat.

1. Eredeti alakban: $y'(t) = 0.6e^{-t} - 0.2\,y(t)$.
Itt $b(t) = 0.6e^{-t}$ és $\alpha := -1 \neq k := -0.2$, így $y_p(t) = Ae^{-t}$. Behelyettesítve:
$-Ae^{-t} = 0.6e^{-t} - 0.2\,Ae^{-t} \Rightarrow -A = 0.6 - 0.2\,A \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$, azaz $y_p(t) = -\frac{3}{4}e^{-t}$.
2. Változtassuk meg így a befolyó sómennyiséget: $y'(t) = 3\,e^{-0.2\,t} - 0.2\,y(t)$.
Itt $b(t) = 3\,e^{-0.2\,t}$ és $\alpha = k = -0.2$, így $y_p(t) = Ate^{-0.2\,t}$. Behelyettesítve:
$Ae^{-0.2\,t} - 0.2\,Ate^{-0.2\,t} = 3\,e^{-0.2\,t} - 0.2\,Ate^{-0.2\,t} \Rightarrow Ae^{-0.2\,t} = 3\,e^{-0.2\,t} \Rightarrow A = 3,\quad y_p(t) = 3te^{-0.2\,t}$.

II. Másodrendű homogén lineáris KDE-k. Ezek általános alakja:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

vagy tömörebben $ay'' + by' + cy = 0$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ állandók. Az *általános megoldás* mindig $y = c_1y_1 + c_2y_2$ alakú ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ áll.), amit a következőképpen kaphatunk meg. Tekintsük az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \text{(K)}$$

másodfokú *karakterisztikus egyenletet*. Három esetet különböztetünk meg.

(i) Ha a (K) egyenletnek két valós gyöke van: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor

$$y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstansok}).$$

(ii) Ha a (K) egyenletnek egy db kétszeres valós gyöke van: λ, akkor

$$y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstansok}).$$

(iii) Ha a (K) egyenletnek két komplex gyöke van: $\alpha \pm i\beta$, akkor

$$y(t) = c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstansok}).$$

A kar. egyenlet gyökei alapján a három megoldóképlet valamelyikét használjuk.

Megjegyzés. Ha a kar. egyenlet gyökei komplexek, akkor a fenti (iii) megoldóképlet felírható az alábbi alakban is: $y(t) = A\,e^{\alpha t}\cos(\beta t - \varphi_0)$ $(A \geq 0,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)
Ha itt $\alpha = 0$, akkor ez a harmonikus rezgést, ha pedig $\alpha < 0$, akkor az alulcsillapított rezgést írja le.

Példák

(a) $y'' + y' - 6y = 0.$

A karakterisztikus egyenlet, (K): $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$; gyökei: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2 \Rightarrow (i)$ eset.

Az általános megoldás: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0.$

(K): $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$; gyöke: $\lambda = 2 \Rightarrow (ii)$ eset.

Az általános megoldás: $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

(c) $y'' - 6y' + 13y = 0.$

(K): $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$; gyökei: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i \Rightarrow (iii)$ eset.

Az általános megoldás: $y(t) = c_1 e^{3t} \cos 2t + c_2 e^{3t} \sin 2t$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

Másik alak: $y(t) = A\, e^{3t} \cos(2t - \varphi_0)$ $(A \geq 0,\ \ \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

(d) $y'' + 4y = 0$ (harmonikus rezgés).

(K): $\lambda^2 + 4 = 0$; gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow (iii)$ eset.

Az általános megoldás: $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

Másik alak: $y(t) = A \cos(2t - \varphi_0)$ $(A \geq 0,\ \ \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

(e) $y'' - 4y = 0.$

(K): $\lambda^2 - 4 = 0$; gyökei: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2 \Rightarrow (i)$ eset.

Az általános megoldás: $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

(f) Kezdetérték-feladat a (d)-esből: $y'' + 4y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 6.$

Az általános megoldás: $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

Az általános megoldás deriváltja: $y'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t.$

Behelyettesítve a kezdeti feltételeket:

$$0 = y(0) = c_1 \text{ és } 6 = y'(0) = 2c_2.$$

Tehát $c_1 = 0$ és $c_2 = 3$, így a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás: $y(t) = 3 \sin 2t.$

Házi feladatok.

1. RC-áramkörökben az áramerősséget a t idő függvényében az $I(t)$ függvény írja le. Az alábbi KDE áll fenn: $R\,I'(t) + \frac{1}{C}I(t) = F(t)$, ahol $R, C > 0$ állandók (C a kondenzátor kapacitása és R az ellenállás), és $F(t)$ írja le a külső gerjesztést.

   (a) Adjuk meg a megoldást, ha $I(0) =: I_0$ adott, és nincs külső gerjesztés, azaz $F(t) \equiv 0$!

   (b) Adjuk meg az általános megoldást, ha $R = C = 1$ és $F(t) = F_0 \sin t$ periodikus gerjesztés, ahol $F_0 > 0$ állandó! Mutassuk meg, hogy hosszú idő után $I(t)$ is kb. periodikus!

2. Oldjuk meg:

   (a) $t\,\dot{x}(t) - 2x(t) = 2t^4$ (először osszunk t-vel!)

   (b) $E'(r) = -\frac{2}{r}\,E(r) + \frac{1}{r}$ (itt $E(r) > 0$ egy térbeli tömegpont erőtere $\frac{1}{r}$-es külső erő mellett).

3. Két anyag koncentrációját $x(t)$ és $y(t)$ írja le az idő függvényében. Ha az első anyag k sebességű reakcióval alakul át a másodikba, amely közben ettől függetlenül μ sebességgel lebomlik, akkor ezt az $\dot{x}(t) = -kx(t)$ és $\dot{y}(t) = kx(t) - \mu y(t)$ egyenletek írják le. Adjuk meg az x és y függvényeket, ha $k > \mu$, és kezdetben csak az első anyagból van jelen egységnyi, azaz $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

   (Útm.: előbb az elsőt, majd a másodikat oldjuk meg.)

4. Tekintsük a fent említett áramkört, ha tekercset is betettünk (melynek $L > 0$ az indukciós együtthatója), és ha nincs külső gerjesztés. Ekkor az $L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$ egyenletet kapjuk.

   Adjuk meg ennek általános megoldását az alábbi esetekben! Ha ez tartalmaz sin- ill. cos-függvényt, akkor mindkét tanult alakban (c_1 és c_2, ill. A és φ_0 konstansokkal is) írjuk fel!

   (a) Ha nincs ellenállás (azaz $R = 0$), általános $L, C > 0$ mellett.

   (b) Ha nincs ellenállás (azaz $R = 0$), $L = C = 2$.

   (c) Ha $L = 1$, $R = 3$ és $C = 0,4$.

   (d) Ha $L = 2$, $R = 10$ és $C = 0,08$.

   (e) Ha $L = 2$, $R = 4,5$ és $C = 1$.

5. Szivárgó talajvíz vízszintes áramlása esetén a vízállás eltérését a felső referenciaszinttől egyszerű (homogén és csak egyetlen irányban változó) esetben egy olyan h függvény írja le, melyre a $T^2h''(x) - h(x) = 0$ egyenlet teljesül, ahol x a kezdőponttól mért távolság, $T > 0$ a medenceméretekből és áteresztőképességekből származó paraméter.

   (a) Adjuk meg a KDE általános megoldását!

   (b) Legyen $T = 100$ m. Adjuk meg a KDE megoldását a $h(0) = 0$, $h'(0) = 0.04$ kezdeti feltétel mellett!

6. Adjuk meg 4.(a) feladat egyenletének megoldását az $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett!

A házi feladatok megoldása.

1. (a) $I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{CR}t}$.

   (b) $I(t) = ce^{-t} + \frac{F_0}{2}(\sin t - \cos t) \qquad (c \in \mathbb{R})$.

   Ha $t \to +\infty$, akkor $\lim\limits_{t\to+\infty} ce^{-t} = 0$, így hosszú idő után a megoldás kb. $I(t) \approx \frac{F_0}{2}(\sin t - \cos t)$.

2. (a) $x(t) = ct^2 + t^4 \quad (c \in \mathbb{R})$; (b) $E(r) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{r^2} \quad (c > 0)$.

3. $x(t) = e^{-kt}, \quad y(t) = \frac{k}{k-\mu}(e^{-\mu t} - e^{-kt})$.

4. (a) $I(t) = c_1 \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}) + c_2 \sin(\frac{t}{\sqrt{LC}}) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

   Másik alak: $I(t) = A\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \varphi_0) \quad (A \geq 0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

   (b) $I(t) = c_1 \cos(\frac{t}{2}) + c_2 \sin(\frac{t}{2}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

   Másik alak: $I(t) = A\cos(\frac{t}{2} - \varphi_0) \quad (A \geq 0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

   (c) $I(t) = c_1 e^{-\frac{3}{2}t} \cos(\frac{t}{2}) + c_2 e^{-\frac{3}{2}t} \sin(\frac{t}{2}) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

   Másik alak: $I(t) = A\, e^{-\frac{3}{2}t} \cos(\frac{t}{2} - \varphi_0) \quad (A \geq 0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

   (d) $I(t) = c_1 e^{-\frac{5}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{5}{2}t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

   (e) $I(t) = c_1 e^{-\frac{1}{4}t} + c_2 e^{-2t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

5. (a) $h(x) = c_1 e^{\frac{x}{T}} + c_2 e^{-\frac{x}{T}} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstansok).

   (b) $h(x) = 2\left(e^{\frac{x}{100}} - e^{-\frac{x}{100}}\right) = 4\sinh\frac{x}{100}$.

6. $I(t) = \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}) + \sqrt{LC}\sin(\frac{t}{\sqrt{LC}})$.

3. gyakorlat. *Másodrendű inhomogén lineáris KDE-k.*

Az egyenlet:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

ahol az $f(t)$ ún. jobboldal (vagy inhomogenitás) írja le a külső gerjesztést. A fenti inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

alakú, ahol $y_h(t)$ a homogén egyenlet általános megoldása és $y_p(t)$ az inhomogén egyenlet egy db (ún. partikuláris) megoldása. Utóbbit a próbafüggvény módszerével keressük meg. Az előadáson az alábbi táblázatot tanultuk:

$f(t)$	$y_p(t)$	
	1. lépés: próbafv.	2. lépés: rezon. ell.
re^{at}	Ae^{at}	$\mu = a$
$P(t)$ n-edfokú pol.	$Q(t)$ n-edfokú pol.	$\mu = 0$
$r\cos bt$	$A\cos bt + B\sin bt$	$\mu = ib$
$s\sin bt$	$A\cos bt + B\sin bt$	$\mu = ib$
$r\cos bt + s\sin bt$	$A\cos bt + B\sin bt$	$\mu = ib$
$e^{at}(r\cos bt + s\sin bt)$	$e^{at}(A\cos bt + B\sin bt)$	$\mu = a + ib$

Ennek jelentése, hogy két lépésben keressük meg a próbafüggvényt:

- Az első lépésben kiválasztjuk az "1. lépés" oszlopából a megadott alakú $f(t)$ jobboldalhoz javasolt $y_p(t)$ függvényt.
- A 2. lépésben megnézzük, hogy a megadott μ érték gyöke-e a (K) karakterisztikus egyenletnek. Ha nem gyöke, akkor az eddigi $y_p(t)$ jó lesz próbafüggvénynek. Ha gyöke, akkor viszont a próbafüggvényt még meg kell szorozni: vagy t-vel (ha μ egyszeres gyöke (K)-nak), vagy t^2-tel (ha μ kétszeres gyöke (K)-nak)

Végül a próbafüggvényben lévő ismeretlen együtthatókat az egyenletbe való behelyettesítéssel számoljuk ki.

Megjegyzések. A 2. lépést a rezonancia ellenőrzésének hívjuk. Ha ui. μ gyöke (K)-nak, az épp azt jelenti, hogy az $f(t)$ jobboldal maga is megoldása az inhomogén egyenletnek, azaz a gerjesztés rezonál a homogén egyenlet ("belső") megoldásaival.

A táblázat még folytatható lenne $e^{at}P(t)$ és $e^{at}P(t)(r\cos bt + s\sin bt)$ alakú jobboldalakra is (ún. kvázipolinomok), ahol ugyanilyen alakúak a próbafüggvények is. Ilyenekkel itt nem fogunk számolni.

A táblázatban $r\cos bt$ és $s\sin bt$ redundánsan szerepel, ezek amúgy speciális esetei az $r\cos bt + s\sin bt$ alaknak, ha s vagy r nulla. Ezzel is hangsúlyozzuk, hogy a próbafüggvényben mindig mindkét taggal indítandó a keresés.

Példák:

1. Oldjuk meg: $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = f(t)$, ahol: (a) $f(t) = e^{3t}$, (b) $f(t) = e^t$.

Megoldás.

Homogén egyenlet. A karakterisztikus egyenlet: (K) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, amiből $\lambda_{1,2} = 1$. (Egy db kétszeres gyök, azaz belső rezonancia van.) A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Inhomogén egyenlet.

(a) $f(t) = e^{3t}$. Táblázatunk alapján a próbafüggvény az 1. lépésben $y_p(t) = Ae^{3t}$. Itt $\mu = 3$ nem gyöke a (K) kar. egy.-nek, így ez az $y_p(t)$ jó lesz. Ezt az eredeti egyenletbe írva azt kapjuk, hogy

$$9Ae^{3t} - 6Ae^{3t} + Ae^{3t} = e^{3t}.$$

Itt oszthatunk e^{3t}-vel (ami nem 0), amiből $(9 - 6 + 1)A = 1$, azaz $A = 1/4$. Tehát az általános megoldás

$$y_{i,a}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{4} e^{3t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

b) $f(t) = e^t$. Táblázatunk alapján a próbafüggvény az 1. lépésben $y_p(t) = Ae^t$. Itt $\mu = 1$ kétszeres gyöke a (K) kar. egy.-nek, így ezt a próbafüggvényt még meg kell szorozni t^2-tel, azaz $y_p(t) = At^2e^t$. Ezt beírva az eredeti egyenletbe kapjuk, hogy

$$A(2 + 4t + t^2)e^t - 2A(2t + t^2)e^t + At^2e^t = e^t.$$

Itt oszthatunk e^t-vel (ami nem 0), majd látható, hogy a t^2-es és t-s tagok kiesnek, és pusztán $2A = 1$ marad. Így $A = 1/2$, tehát az általános megoldás

$$y_{i,a}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

2. *Gerjesztett RLC-áramkörökben* az időben változó $I(t)$ áramerősséget az alábbi KDE írja le:

$$L\,I''(t) + R\,I'(t) + \tfrac{1}{C} I(t) = F(t),$$

ahol $R, L, C > 0$ állandók (az ellenállás nagysága, a tekercs induktivitása, ill. a kondenzátor kapacitása). Legyen $L = 1$, $R = 3$, $C = 0.5$.

Írjuk fel, milyen alakban keresendő az $I_p(t)$ partikuláris megoldás, valamint az (a), (b), (g) esetekben oldjuk is meg (azaz számítsuk ki a paramétereket), ha $F(t) := \ldots$

(a) e^t; (b) e^{-t} (itt mutassuk meg azt is, hogy nem jönne ki a megoldás a t szorzó nélkül);
(c) $2t + 1$; (d) t; (e) t^2; (f) 3; (g) $\sin 2t$; (h) $e^{-t}\sin 2t$;
(i) $e^{2t} - \cos t$; (j) $4 + e^{-t}$.

Megoldás.

Az egyenlet: $I''(t) + 3\,I'(t) + 2I(t) = F(t)$.

Homogén egyenlet. A karakterisztikus egyenlet: (K) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, gyökei: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. A homogén egyenlet általános megoldása

$$I_{h,a}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Inhomogén egyenlet.

(a) $f(t) = e^t$. Az 1. lépésben $I_p(t) = Ae^t$. Ez jó lesz: rezonancia nincs, mert $\mu = 1$ nem gyöke (K)-nak. Az eredeti egyenletbe írva $(A + 3A + 2A)e^t = e^t$ adódik. Tehát $A = 1/6$ és így az általános megoldás

$$I_{i,a}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(b) $f(t) = e^{-t}$. Az 1. lépésben $I_p(t) = Ae^{-t}$. Itt az előző ponthoz képest az a különbség, hogy rezonancia van, mert $\mu = -1$ gyöke (K)-nak, mégpedig egyszeres, így a helyes próbafüggvény $I_p(t) = Ate^{-t}$. Az eredeti egyenletbe beírva

$$A\Big(-2 + t + 3(1 - t) + 2t\Big)e^{-t} = e^{-t},$$

itt a t-s tagok kiesnek és $A = 1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$I_{i,a}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + te^{-t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(Ha hibásan csak $I_p(t) = Ae^{-t}$ alakban kerestük volna, akkor az $A(1 - 3 + 2) = 1$ egyenletet kaptuk volna, azaz $A \cdot 0 = 1$, és ilyen A nincs.)

(c) $f(t) = 2t + 1$. Ez elsőfokú polinom; rezonancia nincs, mert $\mu = 0$ nem gyöke (K)-nak. A jó próbafüggvény $I_p(t) = At + B$.

(d) $f(t) = t$. A c) ponthoz hasonlóan a jó próbafüggvény $I_p(t) = At + B$.

(e) $f(t) = t^2$. Ez másodfokú polinom; rezonancia nincs, mert $\mu = 0$ nem gyöke (K)-nak. A jó próbafüggvény $I_p(t) = At^2 + Bt + C$.

(f) $f(t) = 3$. Ez nulladfokú polinom; rezonancia nincs. A jó próbafüggvény $I_p(t) = A$.

(g) $f(t) = \sin 2t$. Táblázatunk alapján a próbafüggvény az 1. lépésben $I_p(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$. Ez jó lesz: rezonancia nincs, mert $\mu = 2it$ nem gyöke (K)-nak. Itt

$$\begin{aligned} I'_{p,t}(t) &= -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \\ I''_{p,t}(t) &= -4A\cos 2t - 4B\sin 2t, \end{aligned}$$

amit az eredeti inhomogén egyenletbe beírva

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + 3(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + 2(A\cos 2t + B\sin 2t) \;=\; \sin 2t$$

adódik. Innen $\cos 2t$ és $\sin 2t$ együtthatóit egyenlővé téve a

$$\begin{aligned} -2A + 6B &= 0 \\ -6A - 2B &= 1 \end{aligned}$$

kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldásai $A = -3/20$, $B = -1/20$, így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$I_{i,a}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} - \frac{3}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(h) $f(t) =^{-t} \sin 2t$. A jó próbafüggvény $I_p(t) = e^{-t}(A\sin 2t + B\cos 2t)$.

(i) $f(t) = e^{2t} - \cos t$. A jó próbafüggvény $I_p(t) = Ae^{2t} + B\cos t + C\sin t$.

(j) $f(t) = 4 + e^{-t}$. A jó próbafüggvény $I_p(t) = A + Be^{-t}$.

Házi feladatok.

1. Egy inga gerjesztett lengését az $y''(t) + 4y(t) = f(t)$ KDE írja le. Mi az általános megoldás, ha:

   (a) $f(t) = 2t$, (b) $f(t) = 4t^2$, (c) $f(t) = \cos 2t$?

2. Írjuk fel egy lecsengően gerjesztett RLC-áramkört leíró $L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}I(t) = F_0 e^{-\gamma t}$ egyenlet partikuláris megoldását általános $R, L, C > 0$ esetén! (Külön kell vizsgálni aszerint, hogy $-\gamma$ gyöke-e a kar. egy.-nek, és hányszoros.)

A házi feladatok megoldása.

1.

Homogén egyenlet: A karakterisztikus egyenlet (K) $\lambda^2 + 4 = 0$, ennek két gyöke $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ és így a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_{h,a}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Inhomogén egyenlet:

(a) Rezonancia nincs, $y_p(t) = At + B$. Innen $4(At + B) = 2t$ adódik, amiből $A = 1/2$, $B = 0$. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{i,a}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{2}\,t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(b) Rezonancia nincs, $y_p(t) = At^2 + Bt + C$. Innen $2A + 4(At^2 + Bt + C) = 4t^2$ adódik, amiből $A = 1$, $B = 0$, $C = -1/2$. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{i,a}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + t^2 - \frac{1}{2} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

(c) Rezonancia van, $\mu = 2i$ egyszeres gyöke (K)-nak. Az $y_p(t) = A\cos 2t + B \sin 2t$ (táblázat 1. lépése szerinti) próbafüggvényt így t-vel szorozzuk:

$$y_p(t) = At \cos 2t + Bt \sin 2t\,.$$

Ezt az eredeti egyenletbe beírva az együtthatókra a $-4A = 0$, $4B = 1$ kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $A = 0$, $B = 1/4$. Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{i,a}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{4}\,t \sin 2t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

2.

Homogén egyenlet: A karakterisztikus egyenlet: $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$.

Inhomogén egyenlet:

1. eset. Ha $-\gamma$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz $L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C} \neq 0$, akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $I_p(t) = Ae^{-\gamma t}$ alakban kereshetjük. Ezt az eredeti egyenletbe írva

$$A\Big(L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C}\Big)e^{-\gamma t} = F_0 e^{-\gamma t},$$

ebből $A = \frac{F_0}{L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C}}$ (a nevező nem 0), a keresett partikuláris megoldás pedig

$$I_p(t) = \frac{F_0}{L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C}}e^{-\gamma t}.$$

2. eset. Ha $-\gamma$ egyszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $I_p(t) = Ate^{-\gamma t}$ alakban kereshetjük, amit az eredeti egyenletbe írva

$$A\left[\left(\underbrace{L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C}}_{=0}\right)t - 2L\gamma + R\right]e^{-\gamma t} = F_0 e^{-\gamma t}$$

adódik. Itt $L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C} = 0$ és $-2L\gamma + R \neq 0$, hiszen ha ez utóbbi nulla lenne, akkor $\gamma_{1,2} = \frac{R}{2L}$ kétszeres gyöke kellene, hogy legyen a karakterisztikus egyenletnek, ezt viszont feltettük, hogy nincs így. Ebből tehát $A = \frac{F_0}{-2L\gamma+R}$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$I_p(t) = \frac{F_0}{-2L\gamma + R}\,te^{-\gamma t}.$$

3. eset Ha $-\gamma$ kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $I_p(t) = At^2e^{-\gamma t}$ alakban kereshetjük, amit az eredeti egyenletbe írva

$$A\left[\left(\underbrace{L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C}}_{=0}\right)t^2 + 2\left(\underbrace{-2L\gamma + R}_{=0}\right) + 2L\right]e^{-\gamma t} = F_0 e^{-\gamma t}$$

adódik. Itt $L\gamma^2 - R\gamma + \frac{1}{C} = 0$ és $-2L\gamma + R = 0$, hiszen $\gamma_{1,2} = \frac{R}{2L}$ a karakterisztikus egyenlet kétszeres gyöke. Innen tehát $A = \frac{F_0}{2L}$, a keresett partikuláris megoldás pedig

$$I_p(t) = \frac{F_0}{2L}\,t^2e^{-\gamma t}.$$

4. gyakorlat. *A hatványsor-módszer. Lineáris rendszerek.*

I. A hatványsor-módszer.

Ez a módszer az x_0 körüli kezdetiérték-feladat $y(x)$ megoldását állítja elő az x_0 pont körül Taylor-sorral, ha a KDE-ből felírható egy rekurzió az együtthatókra. Általában a megoldást csak közelítjük Taylor-polinommal, amihez az első néhány együtthatót számítjuk ki.

Feladatainkban az $x_0 = 0$ pont körüli sort közelítjük max. 4 tagig:

$$y(x) \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 .$$

Az $y(0)$, $y'(0)$ ... értékeket az adatokból ill. a KDE ismételt deriválása segítségével számítjuk ki.

Feladatok

1. $y'(x) - 2x\,y(x) = 1, \quad y(0) = 1.$ Számítsuk ki a közelítő polinomot az x^4-es tagig!

Megoldás. A közelítő polinom felírásához az $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{(4)}(0)$ értékekre lesz szükségünk. A KDE-t $y'(x) = 2x\,y(x) + 1$ formában használjuk.

- A kezdeti feltételből: $y(0) = 1$.
- Az eredeti KDE-ben $x = 0$ értéket helyettesítve: $y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot y(0) + 1 = 1$.

  A többi értéket a KDE ismételt deriválásával számíthatjuk ki, rekurzívan felhasználva a már kiszámolt 0-beli értékeket.
- Deriváljuk az $y'(x) = 2x\,y(x) + 1$ KDE mindkét oldalát! Mivel $(2xy(x))' = (2x)'y(x) + 2xy'(x) = 2y(x) + 2xy'(x)$, így

$$y''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 0, \qquad \text{így} \qquad y''(0) = 2y(0) + 2 \cdot 0 \cdot y'(0) = 2.$$

- Az imént kapott $y''(x) = 2y(x) + 2xy'(x)$ egyenletet deriválva:

$$y'''(x) = 2y'(x) + (2x)'y'(x) + 2x\,y''(x) = 4y'(x) + 2x\,y''(x),$$

$$\text{így ha } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 4y'(0) + 2 \cdot 0 \cdot y''(0) = 4 \cdot 1 + 0 = 4.$$

- Az imént kapott $y'''(x) = 4y'(x) + 2x\,y''(x)$ egyenletet deriválva:

$$y^{(4)}(x) = 4y''(x) + 2y''(x) + 2xy'''(x),$$

$$\text{így ha } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(4)}(0) = 6y''(0) + 2 \cdot 0 \cdot y'''(0) = 12.$$

Összegezve: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 4$, $y^{(4)}(0) = 12$, így

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4.$$

2. $y''(x) = y^2(x), \quad y(0) = y'(0) = 1.$ Számítsuk ki a közelítő polinomot az x^3-ös tagig!

Megoldás. A közelítő polinom felírásához az $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ értékekre lesz szükségünk.

- A kezdeti feltételből: $y(0) = y'(0) = 1$.
- Az eredeti KDE-be $x = 0$ értéket helyettesítve: $y''(0) = y^2(0) = 1^2 = 1$.
- Az eredeti KDE-t deriválva (felhasználva az összetett függvény deriválási szabályát):

$$y'''(x) = 2y(x)y'(x), \qquad \text{így ha } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 2y(0)y'(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Összegezve:
$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

3. $y'(t) - y(t)\sin t = t, \quad y(0) = 2.$ Számítsuk ki a közelítő polinomot a t^3-ös tagig!

Megoldás. Ezen feladat annyiban tér el az előző kettőtől, hogy itt a változó t lesz x helyett, így a sorban t hatványai lesznek. A közelítő polinom felírásához az $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ értékekre lesz szükségünk. A KDE-t $y'(t) = y(t)\sin t + t$ formában használjuk.

- A kezdeti feltételből: $y(0) = 2$.
- Az eredeti KDE-be $t = 0$ értéket helyettesítve: $y'(0) = y(0)\sin 0 + 0 = 2 \cdot 0 + 0 = 0$.
- Az eredeti KDE-t deriválva

$$y''(t) = y'(t)\sin t + y(t)\cos t + 1, \quad \text{így ha } t = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = y'(0)\sin 0 + y(0)\cos 0 + 1 = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

- Deriválva az előbbi egyenletet:

$$y'''(t) = y''(t)\sin t + y'(t)\cos t + y'(t)\cos t - y(t)\sin t,$$

$$\text{így ha } t = 0 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = y''(0)\sin 0 + 2y'(0)\cos 0 - y(0)\sin 0 = 0.$$

Összegezve:
$$y(t) \approx 2 + \frac{3}{2}t^2.$$

II. Lineáris KDE-rendszerek.

Kéttagú $\dot{x}(t) = Ax(t)$ rendszereket oldunk meg, ahol A adott 2×2-es mátrix:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t), \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

Az általános megoldásra képlet adható. Legyenek λ_1 és λ_2 az A sajátértékei.

(i) *Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós.* Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ ezekhez tartozó sajátvektorok, ekkor

$$\underline{x}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\, \underline{u} + c_2\, e^{\lambda_2 t}\, \underline{v} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

(Megengedhető $\lambda_1 = \lambda_2$ is, ha van két független sajátvektor: ekkor ezek lesznek $\underline{u}$ és $\underline{v}$.)

(ii) *Ha $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, de csak egy független sajátvektor van.* Legyen ez $\underline{u}$, valamint legyen $\underline{v}$ az $A\underline{v} = \lambda\underline{v} + \underline{u}$ egyenlet megoldása. Ekkor

$$\underline{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{\lambda t}\, \underline{u} + c_2\, e^{\lambda t}\, \underline{v} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

(iii) *Ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ komplex sajátértékek ($\beta \neq 0$).* Legyen $\underline{p}$ az $(\alpha + i\beta)$-hoz tartozó (komplex) sajátvektor, $\underline{u} = Re\,\underline{p} \in \mathbb{R}^2$ és $\underline{v} = Im\,\underline{p} \in \mathbb{R}^2$, azaz $\underline{p} = \underline{u} + i\underline{v}$. Ekkor

$$\underline{x}(t) = r\, e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)\, \underline{u} - r\, e^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi_0)\, \underline{v} \qquad (r \geq 0,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

Feladatok

1. Adjuk meg az általános megoldást: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

Megoldás. Az A együtthatómátrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- *Sajátértékek*: a $det(A - \lambda I) = 0$ egyenlet megoldásai. Itt

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5. \qquad \text{Ez az (i) eset.}$$

- *Az u és v vektorok*: sajátvektorok.

$$\text{Ha } \lambda = 1: \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + u_2 = u_1 \\ 3u_1 + 4u_2 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = -u_1, \text{ így pl. } u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ jó sv.}$$

$$\text{Ha } \lambda = 5: \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 5v_1 \\ 3v_1 + 4v_2 = 5v_2 \end{cases} \Rightarrow v_2 = 3v_1, \text{ így pl. } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ jó sv.}$$

- *A megoldás* az (i) pont alapján:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\, e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^t + c_2\, e^{5t} \\ -c_1\, e^t + 3c_2\, e^{5t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}).$$

2. Adjuk meg az általános megoldást: $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 \end{cases}$

Megoldás. Az A együtthatómátrix: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- *Sajátértékek*: $\det\begin{pmatrix}3-\lambda & -1\\ 4 & -1-\lambda\end{pmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)+4 = \lambda^2-2\lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1.$

- *Az u és v vektorok*: ez a (ii) eset. Számítsuk ki a $\lambda=1$ sajátértékhez az u sajátvektort:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3u_1-u_2=u_1\\ 4u_1-u_2=u_2\end{cases} \Rightarrow u_2=2u_1,\ \text{így pl. } u=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \text{ jó sajátvektor;}$$

majd számítsuk ki a v vektort, melyre $Av=\lambda v+u$:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3v_1-v_2=v_1+1\\ 4v_1-v_2=v_2+2\end{cases} \Rightarrow 2v_1=v_2+1,\ \text{így pl. } v=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \text{ jó lesz.}$$

- *A megoldás* a fenti (ii) pont alapján:

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = (c_1+c_2t)\,e^t\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+c_2\,e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(c_1+c_2)e^t + c_2t\,e^t\\ (2c_1+c_2)e^t+2c_2t\,e^t\end{pmatrix} \qquad (c_1,c_2\in\mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

3. Adjuk meg az általános megoldást: $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_1+x_2\\ \dot{x}_2=-x_1+2x_2\end{cases}$

Megoldás. Az A együtthatómátrix: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

- *Sajátértékek*: $\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{pmatrix} = (2-\lambda)^2+1 = \lambda^2-4\lambda+5=0 \Rightarrow\ \lambda_{1,2}=2\pm i$: (iii) eset.

- *Az u és v vektorok*: Számítsuk ki (pl.) a $\lambda_1=2+i$ sajátértékhez a p komplex sajátvektort:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} = (2+i)\cdot\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2p_1+p_2=2p_1+ip_1\\ -p_1+2p_2=2p_2+ip_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p_2=ip_1\\ -p_1=ip_2\end{cases}$$

Elég a $p_2=ip_1$ egyenletet megoldani (a másik ennek i-szerese), pl. $p_1=1$ és így $p_2=i$ jó lesz:

$$p=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad u=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \text{ és } v=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

- *A megoldás* a fenti (iii) pont alapján:

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = r\,e^{2t}\cos(t-\varphi_0)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} - r\,e^{2t}\sin(t-\varphi_0)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\,e^{2t}\cos(t-\varphi_0)\\ -r\,e^{2t}\sin(t-\varphi_0)\end{pmatrix}$$

(ahol $r\ge 0$, $\varphi_0\in[0,2\pi)\in\mathbb{R}$ tetsz.)

Házi feladatok.

1. $y''(x) = xy^2(x) - y'(x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$ Számítsuk ki a közelítő polinomot az x^3-ös tagig!

2. Egy ℓ hosszú inga kitérésének szögét az idő függvényében a $\theta(t)$ függvény adja meg. A mozgásegyenletből az m tömeggel egyszerűsítve a $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0$ egyenletet kapjuk. Jelölje $\omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Függőleges helyzetből v sebességgel meglökve a $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(t) = v$ kezdeti feltételeket kapjuk. Számítsuk ki ekkor a megoldást közelítő polinomot a t^3-ös tagig!

3. Egy kémiai reakcióban szereplő két anyag koncentrációját az idő függvényében az $u(t)$ és $v(t)$ függvények írják le. Ha a két anyag kölcsönhatásával arányosan az egyik anyag a másikba alakul, akkor az

   $u'(t) = ku(t)v(t),$

   $v'(t) = -ku(t)v(t)$

   egyenleteket kapjuk, ahol $k > 0$ állandó. Legyen $k := 1$, és $u(0) = v(0) = 1.$ Számítsuk ki ekkor az $u(t)$ és $v(t)$ megoldásokat közelítő polinomot a t^3-ös tagig!

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 3x_2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

7. Egy faj populációjának egyedszámát két élőhelyen az idő függvényében (folytonos közelítéssel) az $x(t)$ és $y(t)$ függvények írják le. Ha az első élőhelyen a faj az egyszerű növekedési modell szerint szaporodik, és mindkét irányban az egyedszámmal arányos migráció folyik, akkor az

   $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = rx \end{cases}$

   rendszert kapjuk. Adjuk meg ennek általános megoldását az $a = r = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén! Mutassuk meg, hogy hosszú idő elteltével a két élőhelyen vett populációk hányadosa kb. állandó lesz!

8. Ha a fenti modellben a faj a második élőhelyen is az egyszerű növekedési modell szerint szaporodik, akkor az

   $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = rx + sy \end{cases}$

   rendszert kapjuk. Adjuk meg ennek általános megoldását az $a = r = s = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén!

A házi feladatok megoldása.

1. $y(x) \approx\ 2 + x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{6}\,x^3.$

2. $\theta(t) \approx\ vt - \frac{v\omega^2}{6}t^3.$

3. $u(t) \approx\ 1 + t - \frac{t^3}{3}$ és $v(t) \approx\ 1 - t + \frac{t^3}{3}.$

4.
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,e^{-3t}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1\,e^{3t} + 4c_2\,e^{-3t} \\ c_1\,e^{3t} - c_2\,e^{-3t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}).$$

5.
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = r\,e^{3t}\cos(4t - \varphi_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - r\,e^{3t}\sin(4t - \varphi_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,e^{3t}\cos(4t - \varphi_0) \\ -r\,e^{3t}\sin(4t - \varphi_0) \end{pmatrix}$$

(ahol $r \geq 0,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R}$ tetsz.)

6.
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = r\,\cos(t - \varphi_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - r\,\sin(t - \varphi_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos(t - \varphi_0) \\ -r\,\sin(t - \varphi_0) \end{pmatrix}$$

(ahol $r \geq 0,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R}$ tetsz.)

7. Az általános megoldás $a = r = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}).$$

Tekintsük a populációk hányadosát $t \to +\infty$ esetén:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{y(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2c_1e^{2t} - c_2e^{-t}}{c_1e^{2t} + c_2e^{-t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}}{e^{2t}}\cdot\frac{2c_1 - c_2e^{-3t}}{c_1 + c_2e^{-3t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2c_1 - c_2e^{-3t}}{c_1 + c_2e^{-3t}} = \frac{2c_1}{c_1} = 2,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\lim_{t\to+\infty} e^{-3t} = 0$. Tehát igazoltuk, hogy a két élőhelyen vett populációk hányadosa hosszú idő elteltével kb. 2 lesz, azaz az első élőhelyen vett populáció hosszú idő elteltével kb. kétszerese lesz a második élőhelyen vett populációnak.

8.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1\,e^{(1+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,e^{(1-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}c_1e^{(1+\sqrt{2})t} - \sqrt{2}c_2e^{(1-\sqrt{2})t} \\ c_1e^{(1+\sqrt{2})t} + c_2e^{(1-\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}).$$

5. Laplace-transzformáció. Első integrál, fáziskép.

Laplace-transzformáció.

A Laplace-transzformáció egy alkalmas integrállal definiált $f \overset{L}{\longmapsto} F$ függvénytranszformáció, éspedig $F(p) := \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$. A kapott F függvényt f Laplace-transzformáltjának hívjuk.

Az előadásban felírtuk a főbb elemi függvények transzformáltjainak és a deriváltak transzformáltjainak *táblázatát*, valamint láttuk, hogy a transzformáció lineáris. A feladatokban ezt használjuk. (Az értelmezési tartományokat nem írjuk ki, mindvégig a lehető legbővebben értjük.)

$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{1}{p-\alpha}$
t^n $(n \in \mathbf{N}$ áll.)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos bt$ $(b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{p}{p^2+b^2}$
$\sin bt$ $(b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{b}{p^2+b^2}$
$e^{at}t^n$ $(a \in \mathbb{R}, n \in \mathbf{N}$ áll.)	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos bt$ $(a, b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at}\sin bt$ $(a, b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$f'(t)$	$p\,F(p) - f(0)$
$f''(t)$	$p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$

Feladatok.

1. $F(p) =?$, ha (a) $f(t) := 7\sin 3t - 5\cos 2t$, (b) $f(t) := 4e^{-2t}$.

   Megoldás. Táblázat + linearitás $\Rightarrow$

   (a) $F(p) = 7 \cdot \frac{3}{p^2+3^2} - 5 \cdot \frac{p}{p^2+2^2} = \frac{21}{p^2+9} - \frac{5p}{p^2+4}$; (b) $F(p) = \frac{4}{p+2}$.

2. (Nem elemi függvény.) $F(p) =?$, ha $f(t) := \delta_3(t)$ (Dirac-delta a $t = 3$ pontban).

   Az előadásról: a $\delta_a(t)$ Dirac-delta egy a pontban koncentrált "végtelen sűrűségű" általánosított függvény. Számolásokban az alábbi formális tulajdonságát használjuk: ha f adott folytonos függény, akkor

   $$(D) \qquad \int_u^v f(s)\delta_a(s)ds = \begin{cases} f(a), & \text{ha } u \le a \le v; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

E képletből, mivel $0 < 3 < \infty$,

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-ps}\,\delta_3(s)ds = e^{-3p}.$$

3. $f(t)$ =?, ha

(a) $F(p) = \frac{p+4}{p^2+9}$, (b) $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+9}$.

Megoldás. Táblázat (most visszafelé keresve) + linearitás révén:

(a) $F(p) = \frac{p}{p^2+3^2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{p^2+3^2} \quad\Rightarrow\quad f(t) = \cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t.$

(b) $F(p) = \frac{1}{(p+2)^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(p+2)^2+(\sqrt{5})^2} \quad\Rightarrow\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,e^{-2t}\sin\sqrt{5}t.$

4. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi feladatokat:

(a) $y''(t) + 4y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

(b) $y^{(4)}(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -1.$

(c) $y''(t) + y(t) = \delta_2(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

A megoldás menete:

KÉP $\overset{L}{\longmapsto}$ algebrai egyenlet $\to$ megoldjuk $\overset{L^{-1}}{\longmapsto}$ a KÉP megoldását kapjuk.

A feladatokban jelöljük $y(t)$ transzformáltját $Y(p)$-vel.

(a) A KDE transzformáltja:

$$\big(p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0)\big) + 4Y(p) = 0 \quad\Rightarrow\quad (p^2+4)\,Y(p) - 3 = 0,$$

mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 3$. Ebből $Y(p)$ kifejezhető:

$$Y(p) = \frac{3}{p^2+4}\,.$$

A visszatranszformáláshoz $Y(p) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}$, ami már visszakereshető a táblázat (+ linearitás) alapján:

$$y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t$$

(b) A KDE transzformáltja:

$$\big(p^4\,Y(p) - p^3\,y(0) - p^2y'(0) - p\,y''(0) - y'''(0)\big) - Y(p) = 0 \quad\Rightarrow\quad (p^4-1)\,Y(p) - p^2 + 1 = 0$$

a kezdeti feltételek alapján. Ebből $Y(p)$ kifejezhető és egyszerűsíthetünk:

$$Y(p) = \frac{p^2-1}{p^4-1} = \frac{1}{p^2+1},$$

így a táblázat alapján

$$y(t) = \sin t\,.$$

(c) Használjuk fel az $y''(t) + y(t) = k(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ feladatra általános függvény esetén az előadáson adott megoldóképletet, mely szerint

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-s)k(s)ds.$$

Esetünkben $k(s) = \delta_2(s)$, és az integrálban használjuk a Dirac-delta fent idézett, (D)-vel jelölt formális tulajdonságát a (rögzített t mellett értelmezett) $f(s) := \sin(t-s)$ függvényre $a = 2$ mellett:

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-s)\delta_2(s)ds = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 2; \\ \sin(t-2), & \text{ha } t \geq 2. \end{cases}$$

(Ugyanis a $t < 2$ esetben a 2 pont nincs a $[0,t]$ integrálási intervallumban, $t \geq 2$ esetén viszont már igen, így akkor az integrál $f(2) = \sin(t-2)$ lesz.)

A rendszer tehát nyugalomban van a $t = 2$ időpontig, majd onnantól a pontszerű impulzus hatására harmonikus rezgés indul.

Első integrál, fáziskép.

Ebben a részben

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

alakú autonóm rendszerekhez keresünk első integrált, azaz olyan kétváltozós $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $t \mapsto V(x(t), y(t)) \equiv$ állandó minden x, y megoldás esetén. Feltesszük, hogy $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ekkor a fentihez

$$(V(x(t), y(t)))^{\cdot} = 0 \quad \text{kell.}$$

Ekkor a megoldások pályája V szintvonalain fut, így ábrázolható a rendszer fázisképe az x, y síkon. A V függvény változóit is x, y-nal jelöljük, ezzel a fázisképet a $V(x,y) \equiv c$ görbék adják, irányításukat $\dot{x}$ és $\dot{y}$ egyenletből vett előjele mutatja meg.

- Speciális eset: "keresztbe vett változók", azaz

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y) \\ \dot{y} = g(x) \end{cases}$$

alakú rendszer esetén keresztbe kell szorozni: $\dot{x}\, g(x) = \dot{y}\, h(y)$. Ha $H' = h$ és $G' = g$, akkor első integrál:

$$V(x,y) := G(x) - H(y).$$

- Még speciálisabb eset: Newton-rendszer. Az $m\ddot{x} + f(x) = 0$ mozgásegyenlet átírható

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{m} f(x) \end{cases}$$

rendszerré. Ekkor $\dot{x}\, f(x) + my\dot{y} = 0$, így ha $U' = f$, akkor $V(x,y) := \frac{1}{2}my^2 + U(x)$ első integrál. Az eredeti egyenlet x megoldásaira:

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + U(x) \equiv \text{állandó.}$$

Ez épp az *energiamegmaradást* írja le. E fázisképeket az $(x, \dot{x})$ síkon ábrázoljuk.

Feladatok.

1. Keressünk első integrált, és ábrázoljuk a fázisképet az x, y síkon!

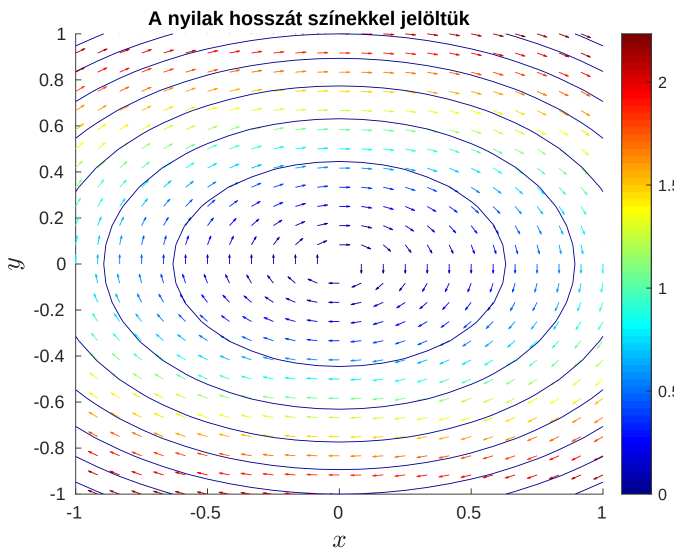
(a) $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \sin x \end{cases}$

Megoldások. A kapott fázisképeken nyilak szemléltetik az $(\dot{x}, \dot{y})$ sebességvektorokat, melyek (a KDE-k révén) megegyeznek az $(f(x,y), g(x,y))$ vektorokkal.

(a) Keresztbevetett változós rendszerrel van dolgunk, ahol $h(y) = 2y$ és $g(x) = -x$. Integrálás után a képlet alapján első integrál:

$$V(x,y) = -\Big(\frac{x^2}{2} + y^2\Big).$$

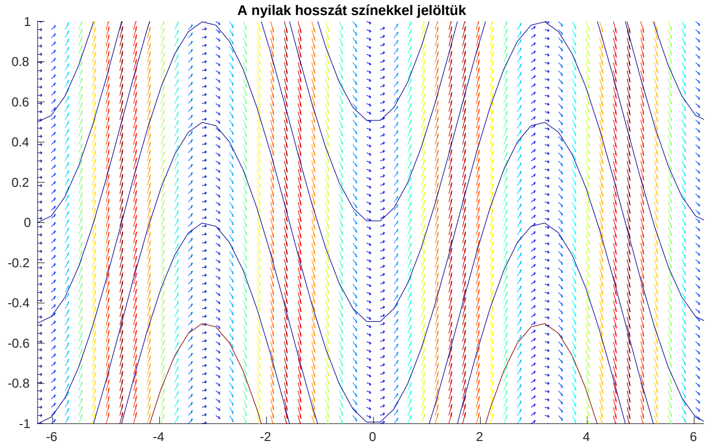
(Ugyanez mínusz nélkül is jó lenne.) Ennek szintvonalai ellipszisek. Irányítás: pl. a felső félsíkban $\dot{x} = 2y > 0$, így x nő. A fáziskép:



(b) Ez is keresztbevetett változós rendszer, ahol $h(y) = 1$ és $g(x) = \sin x$, így

$$V(x,y) = -\cos(x) - y$$

Ennek szintvonalai: $y = c - \cos(x)$. Irányítás: $\dot{x} = 1 > 0$, így x nő. A fáziskép:



2. Tekintsük a rugó által mozgatott test mozgásegyenletét: $m\ddot{x} + Dx = 0$, ahol $m, D > 0$ állandók. Írjuk át az egyenletet rendszerré, keressünk hozzá első integrált, majd írjuk fel az egyenletre az energiamegmaradást és ábrázoljuk a fázisképét az $x, \dot{x}$ síkon!

   Megoldás. Ez egy Newton-rendszer, ahol most $U(x) = \frac{1}{2}Dx^2$ jó lesz, így

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

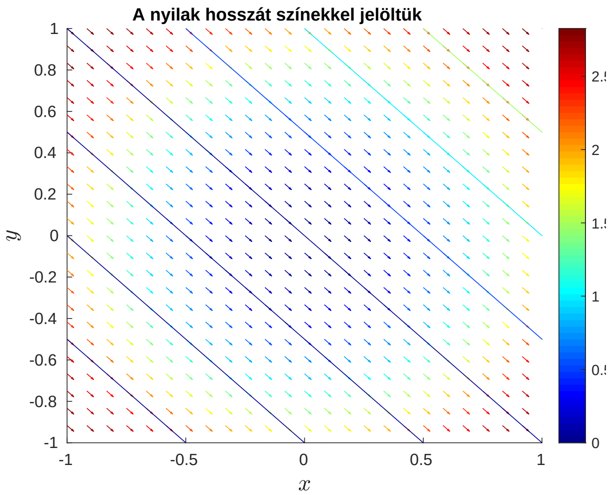
   első integrál. A fáziskép hasonló az (a) feladatéhoz (ellipszisek).

3. Igazoljuk, hogy bármely $f \in C(\mathbb{R}^2)$ esetén az

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = -f(x, y) \end{cases}$$

   rendszernek $V(x, y) := x + y$ első integrálja. (A konkrét f tehát csak azt határozza meg, milyen gyorsan mozognak a pontok a t "idő" függvényében az egyenes pályákon.)

   Megoldás. A két egyenletet összeadva $(x + y)^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$, így a kívánt $(V(x(t), y(t)))^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$ egyenlőség teljesül a $V(x, y) := x + y$ első integrálra. Így a pályák egyenesek, hiszen $x(t) + y(t) \equiv$ állandó. A fáziskép:



Házi feladatok.

1. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi feladatokat!

   A (b)–(c) pontokban használjuk a $p^3 - q^3 = (p-q)(p^2 + pq + q^2)$ azonosságot.

   (a) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$

   (b) $y'''(t) - 8y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = 4.$

   (c) $y'''(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = -1.$

   (d) $y^{(4)}(t) - 9y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0, \ y'''(0) = -3.$

   (e) $y''(t) + y(t) = \delta_{\frac{\pi}{2}}(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$

   (f) $y''(t) + y(t) = h(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0,$ ahol $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \geq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

2. Keressünk első integrált, és ábrázoljuk a fázisképet az x, y síkon!

   (a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = e^x \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 3 \end{cases}$

3. Egy kémiai reakcióban szereplő két anyag koncentrációját az idő függvényében a $t \mapsto u(t) > 0$ és $t \mapsto v(t) > 0$ függvények írják le. Ha a két anyag kölcsönhatásával arányosan az egyik anyag a másikba alakul, akkor az

$$\begin{cases} u'(t) = \ \ k\,u(t)v(t) \\ v'(t) = -k\,u(t)v(t) \end{cases}$$

   egyenleteket kapjuk, ahol $k > 0$ állandó.

   (a) Keressünk első integrált, és ábrázoljuk a fázisképet az u, v síkon! Mutassuk meg, hogy bármely u, v megoldás esetén $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) > 0$! Mit jelent ez?

   (b)* Számítsuk ki az u és v megoldásokat!

A házi feladatok megoldása.

1. (a) $Y(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+5} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p+1)^2+2^2}, \qquad y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}\, e^{-t} \sin 2t.$

   (b) $Y(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^3-8} = \frac{1}{p-2}, \qquad y(t) = e^{2t}.$

   (c) $Y(p) = \frac{p-1}{p^3-1} = \frac{1}{p^2+p+1} = \frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}, \qquad y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$

   (d) $Y(p) = \frac{p^2-3}{p^4-9} = \frac{1}{p^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{p^2+3}, \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}\,t).$

   (e) A megoldóképletből

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-s)\delta_{\frac{\pi}{2}}(s)ds = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < \frac{\pi}{2}; \\ \sin(t - \frac{\pi}{2}) \ \ (\text{azaz} = -\cos t), & \text{ha } t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   (f) A megoldóképletből

$$y(t) = \int_0^t \sin(t-s)h(s)ds = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < \frac{\pi}{2}; \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin(t-s)ds = 1 - \sin t\ , & \text{ha } t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. (a) $V(x,y) = -(2x^2 + \frac{1}{2}y^2)$, vagy lehet $V(x,y) = 4x^2 + y^2$ is. Szintvonalak: ellipszisek.
   (b) $V(x,y) = y - e^x$. Szintvonalak: $y = e^x + c$, azaz $y = e^x$ grafikonjának függőleges eltoltjai.
   (c) $V(x,y) = x - \frac{1}{2}e^y$. Szintvonalak: $x = \frac{1}{2}e^y + c$, azaz $x = \frac{1}{2}e^y$ grafikonjának vízszintes eltoltjai.
   (d) $V(x,y) = 3x - 2y$. Szintvonalak: egyenesek.

3. (a) A gyak. 3. feladatához hasonlóan (sőt valójában spec. eseteként) : a két egyenletet összeadva $(u+v)' = 0$, így $V(u,v) := u + v$ első integrál, és a pályák egyenes szakaszok, melyek a 3. feladatéhoz hasonló fázisképet alkotnak. (Kémiai jelentés: a két anyag összmennyisége állandó marad.)

   A másik kívánt tulajdonság lényegében abból következik, hogy a fázisképen bármely egyenes szakaszon az első (most u) tengely felé tart az $(u(t), v(t))$ pont, de nem érheti el, mert az u tengely pontjai $(u_0, 0)$ alakú konstans megoldások, melyeken az unicitástétel miatt nem mehet át másik megoldás. Így $u(t) \to u_0$ és $v(t) \to 0$, ha $t \to +\infty$. Ez azt jelenti, hogy hosszú idő után az első anyag nagyjából állandó szintre áll be, míg a második anyag nagyjából elfogy.

   (b) Mivel adott pálya mentén $u + v \equiv M$ állandó, ebből v-t kifejezve és beírva az első egyenletbe az

$$u'(t) = ku(t)(M - u(t))$$

   korlátozott szaporodási egyenletet kapjuk, amit már megoldottunk (1. gyakorlat 3. feladat). Végül u ismeretében $v(t) = M - u(t)$ lesz.

6. Fáziskép, stabilitás. Elsőrendű lineáris PDE.

I. Stabilitásvizsgálat. Ebben a részben ismét kétváltozós autonóm rendszerekkel foglalkozunk:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) \\ \dot{y} = f_2(x,y) \end{cases}$$

Most feltesszük, hogy $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$, így $(0,0)$ egyensúlyi pont, azaz $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ konstans megoldás. Ennek stabilitását vizsgáljuk. A $(0,0)$ egyensúlyi pont

- aszimptotikusan stabil, ha egy környezetéből induló minden megoldásra $\lim\limits_{t\to+\infty}(x(t),y(t)) = (0,0)$;
- instabil, ha van olyan U környezete, hogy $(0,0)$-hoz bármilyen közelről indul U-t elhagyó pálya.

Ljapunov-módszer: alkalmas $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ segédfüggvényt keresünk (ennek változóit is x,y-nal jelöljük). A megfelelő tétel szerint a stabilitást a

$$V'(x,y) \cdot f(x,y) = \partial_x V(x,y)\, f_1(x,y) + \partial_y V(x,y)\, f_2(x,y)$$

skalárszorzat előjeléből láthatjuk az alábbiak szerint:

- ha $V'(x,y) \cdot f(x,y) < 0$ $(\forall x,y \neq 0))$, akkor a $(0,0)$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil;
- ha $V'(x,y) \cdot f(x,y) > 0$ $(\forall x,y \neq 0))$, akkor a $(0,0)$ egyensúlyi pont instabil.

A feladatokban a V (ún. Ljapunov-)függvényt

$$V(x,y) = ax^2 + by^2$$

alakban keressük, ahol $a,b > 0$ állandók. Ekkor $V'(x,y) = (2ax,\, 2by)$.

Feladatok: vizsgáljuk meg a $(0,0)$ egyensúlyi pont stabilitását az alábbi rendszerekben!

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = -2y + x^5 \\ \dot{y} = x + y^5 \end{cases}$$

Megoldások.

(a) $V'(x,y) \cdot f(x,y) = 2ax\,(y - x^3) + 2by\,(-x - y^3) = 2(a-b)xy - 2(ax^4 + by^4)$. A második tag mindig negatív, az elsőben viszont xy bármilyen előjelű lehet. Ezért úgy érdemes választani a,b értékét, hogy az első tag kiessen: legyen pl. $a = b = 1$. Az így kapott $V(x,y) = x^2 + y^2$ Ljapunov-függvény esetén tehát

$V'(x,y) \cdot f(x,y) = -2\,(x^4 + y^4) < 0 \quad (\forall x,y \neq 0)) \qquad \Rightarrow \qquad (0,0)$ aszimptotikusan stabil.

(b) $V'(x,y) \cdot f(x,y) = 2ax\,(-2y + x^5) + 2by\,(x + y^5) = (-4a + 2b)xy + 2(ax^6 + by^6)$. Úgy választjuk a,b értékét, hogy $-4a + 2b = 0$ legyen: pl. $a = 1$, $b = 2$. Az így kapott $V(x,y) = x^2 + 2y^2$ Ljapunov-függvény esetén tehát

$V'(x,y) \cdot f(x,y) = 2x^6 + 4y^6 > 0 \quad (\forall x,y \neq 0)) \qquad \Rightarrow \qquad (0,0)$ instabil.

II. Elsőrendű lineáris PDE-k.

Az egyenlet: $$f(x,y)\,\partial_x u + g(x,y)\,\partial_y u = 0$$

ahol f,g adott, folytonos. (Tömör írásmód: nem írjuk ki, hogy $u = u(x,y)$.)

Megoldási módszer: a segédfeladatként felírt

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

autonóm KDE-rendszerhez keressünk $V(x,y)$ első integrált! Ekkor a PDE általános megoldása:

$$u(x,y) = \Phi(V(x,y)) \qquad \text{(ahol } \Phi \in C^1(\mathbb{R}) \text{ tetszőleges függvény).}$$

Feladatok. Adjuk meg az alábbi PDE-k általános megoldását!

(a) $y\,\partial_x u - x\,\partial_y u = 0$.

(b) $2y\,\partial_x u - e^x\,\partial_y u = 0$.

(c) $\partial_t u - 2\,\partial_x u = 0$ (egy térdim. transzportegyenlet).

Megoldások.

(a) Korábban láttuk, hogy az $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ rendszernek $V(x,y) = x^2 + y^2$ első integrálja.

Így a PDE általános megoldása: $u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$ (ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény).

(b) Az $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -e^x \end{cases}$ rendszernél $e^x\,\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$, így $V(x,y) = e^x + y^2$ első integrálja.

Így a PDE általános megoldása: $u(x,y) = \Phi(e^x + y^2)$ (ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény).

(c) A $\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -2 \end{cases}$ rendszernél $\dot{x} + 2\dot{t} = 0$, így $V(x,t) = x + 2t$ első integrálja.

Így a PDE általános megoldása: $u(x,t) = \Phi(x+2t)$ (ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény).

Házi feladatok.

1. Vizsgáljuk meg a $(0,0)$ egyensúlyi pont stabilitását!

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$$

2. Vizsgáljuk meg a $(0,0)$ egyensúlyi pont stabilitását!

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - x \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

3. Adjuk meg az általános megoldást: $y^4\,\partial_x u + \cos x\,\partial_y u = 0$.
4. Adjuk meg az általános megoldást: $\partial_x u - \cos 2x\,\partial_y u = 0$.
5. Adjuk meg az általános megoldást: $3\,\partial_t u + 4\,\partial_x u = 0$.

A házi feladatok megoldása.

1. $V'(x,y)\cdot f(x,y) = 2ax\,(-y+x^3) + 2by\,(x+y^3) \;=\; 2(b-a)xy + 2(ax^4+by^4)$. Úgy választjuk a,b értékét, hogy $b-a=0$ legyen, pl. $a=b=1$. Az így kapott $V(x,y)=x^2+y^2$ Ljapunov-függvény esetén tehát

   $V'(x,y)\cdot f(x,y) = 2\,(x^4+y^4) > 0 \quad (\forall x,y \neq 0)) \qquad \Rightarrow \qquad (0,0)$ instabil.

2. $V'(x,y)\cdot f(x,y) = 2ax\,(3y-x)+2by\,(-2x-y) \;=\; (6a-4b)xy-2(ax^2+by^2)$. Úgy választjuk a,b értékét, hogy $6a-4b=0$ legyen: pl. $a=2$, $b=3$. Az így kapott $V(x,y)=2x^2+3y^2$ Ljapunov-függvény esetén tehát

   $V'(x,y)\cdot f(x,y) = -(4x^2+6y^2) < 0 \quad (\forall x,y \neq 0)) \qquad \Rightarrow \qquad (0,0)$ aszimptotikusan stabil.

3. Az $\begin{cases} \dot x = y^4 \\ \dot y = \cos x \end{cases}$ rendszernél $\cos x\;\dot x\;-y^4\,\dot y = 0$, így $V(x,y)=\sin x - \frac{1}{5}\,y^5$ első integrálja.

   Így a PDE általános megoldása: $u(x,y)=\Phi(\sin x - \frac{1}{5}\,y^5)$ (ahol $\Phi\in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges).

4. Adjuk meg az általános megoldást: $\partial_x u - \cos 2x\,\partial_y u = 0$.

   Az $\begin{cases} \dot x = \;\;1 \\ \dot y = -\cos 2x \end{cases}$ rendszernél $\cos 2x\;\dot x\;+\;\dot y = 0$, így $V(x,y)=\frac{1}{2}\sin 2x + y$ első integrálja.

   Így a PDE általános megoldása: $u(x,y)=\Phi(\frac{1}{2}\sin 2x + y)$ (ahol $\Phi\in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges).

5. A $\begin{cases} \dot t = 3 \\ \dot x = 4 \end{cases}$ rendszernél $3\dot x\;-4\dot t = 0$, így $V(x,t)=3x-4t$ első integrálja.

   Így a PDE általános megoldása: $u(x,t)=\Phi(3x-4t)$ (ahol $\Phi\in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges).