M1c vizsgatémakörök és mintavizsga

Vizsgatémakörök

Az (F) jelölés jelentése: feladat (=konkrét számolás) is és elméleti kérdés is előfordulhat. A többinél csak elméleti jellegű kérdés várható.

1. Elsőrendű közönséges differenciálegyenlet (KDE) és kezdetiérték-probléma (KÉP) fogalma, a KDE és KÉP megoldásainak száma.

2. Szétválasztható KDE, példák. Autonóm KDE fogalma. Egydimenziós fáziskép.

   Elsőrendű lineáris KDE.

3. Másodrendű lineáris KDE (homogén, ill. inhomogén) megoldásainak szerkezete, előállítása. Példák: rezgések.

   Kezdeti- és peremérték-problémák. Sajátértékfeladatok.

4. Lineáris KDE-rendszerek.

   A megoldások szerkezete $n \times n$ esetben. A megoldások előállítása: 2×2 eset; az $n \times n$ eset különböző sajátértékek esetén.

5. A Laplace-transzformáció és alkalmazása. (F)

6. Fáziskép, első integrál, példák. (F)

7. Stabilitásvizsgálat, a Ljapunov-függvény módszere. (F)

8. Elsőrendű homogén lineáris PDE. (F)

   A rezgő húr egyenlete, hővezetés. (F)

Mintavizsga, 2018. május 35.

Egy A4-es lapnyi saját készítésű vázlat használható, egyéb írott segédeszköz (jegyzet, függvénytábla) viszont nem.

Együttműködés, másolás esetén az érintettek *elégtelent* kapnak.

Az alábbi kérdések szemléltetik a vizsgakérdések jellegét, de a vizsga típusa és a tényleges kérdéstípusok ettől eltérhetnek!

1. Hány megoldása van egy $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának, ahol $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ adott függvény?

2. Szemléltessük ábrán az $y'(t) = Ky(t)$ (ahol $K > 0$ állandó) egyszerű növekedési modell megoldásainak grafikonját és a megoldások számát! Autonóm-e, ill. lineáris-e ez a KDE?

3. Legyen $b > 0$ adott szám. Adjuk meg a $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(b) = 0$ sajátértékfeladat λ sajátértékeit és u sajátfüggvényeit!

4. Egy rovarfaj 6 szomszédos élőhelyen való $x_1(t), \dots, x_6(t)$ egyedszámának alakulását egy (6×6)-os $\dot{x}(t) = Ax(t)$ homogén lineáris KDE-rendszer írja le, ahol $A \in \mathbf{R}^{6\times 6}$ adott mátrix. Hány független megoldása van ennek a rendszernek? Hogyan állítható elő e független megoldások ismeretében a rendszer általános megoldása?

5. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi feladatot!

   $y'(t) + 2y(t) = 6, \quad y(0) = 5.$

6. Vezessük le a Lotka–Volterra-féle nyúl–róka-modell első integrálját általános a, b, r, s együtthatók mellett, és vázoljuk fel ez alapján a rendszer fázisképét!

7. Nemlineárisan csillapított rezgés mozgásegyenlete $m\ddot{x} = -Dx - s(\dot{x})$ alakú, ahol $m, D > 0$ állandók és $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adott függvény, melyre $v\, s(v) < 0$ $(\forall v \neq 0)$, azaz a csillapítás a mozgással ellentétesen hat. Ez átírható az $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{D}{m}x - \frac{1}{m}s(v) \end{cases}$ Newton-rendszerré. Legyen $D := 5$, $m := 3$. Keressünk alkalmas Ljapunov-függvényt és vizsgáljuk meg vele a konstans 0 megoldás stabilitását!

8. Adjuk meg a $\cos y\, \partial_x u - 3\, \partial_y u = 0$ PDE általános $u(x, y)$ megoldását!

Összesen 30 pont, a két zh-val együtt 80 pont.

Ponthatárok: 32-44-56-68.