M1c 1. rész **mintazh**

A zh témakörei:

szétválasztható KDE

elsőrendű lineáris KDE

másodrendű lineáris KDE (csak homogén)

Fontos információk:

1. Számológép és egy A4-es lapnyi saját készítésű vázlat használható, egyéb írott segédeszköz (jegyzet, függvénytábla) viszont nem. Együttműködés, másolás esetén az érintettek mérlegelés nélkül elégtelent kapnak.

2. Feleletválasztós kérdéseket teszünk fel.

(a) Az A–E lehetőségek közül mindig *pontosan egy* válasz a helyes.

(b) Az "egyik sem" opció mindig arra vonatkozik, hogy a többi felsorolt válaszlehetőség közül egyik sem helyes.

Feladatsor a túloldalon.

A megadott kérdések szemléltetik a zh-kérdések jellegét, de a zh típusa és a tényleges kérdéstípusok ettől eltérhetnek!

1. Tekintsük az $y'(t) = t^3\,(y(t) - 6)$ egyenletet.

   (a) Ez az egyenlet

   A. autonóm B. másodrendű C. szétválasztható D. harmadrendű E. egyik sem

   (1 p.) A B C D E

   (b) A kontans megoldások száma

   A. 0 B. 1 C. 2 D. végtelen sok E. egyik sem **(1 p.)** A B C D E

   (c) Az általános megoldás implicit alakja (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans):

   A. $y(t) = t^3\Big(\frac{y(t)^2}{2} - 6t\Big)$ B. $y(t) = \frac{t^4}{4}\Big(\frac{y(t)^2}{2} - 6t\Big) + c$ C. $\ln\Big|y(t) - 6\Big| = \frac{t^4}{4} + c$

   D. $-\frac{1}{(y(t)-6)^2} = 3t^2 + c$ E. egyik sem **(1 p.)** A B C D E

   (d) Az általános megoldás explicit alakja: $y(t) = ...$ (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans)

   A. $t^3\Big(\frac{y(t)^2}{2} - 6t\Big)$ B. $\frac{t^4}{4}\Big(\frac{y(t)^2}{2} - 6t\Big) + c$ C. $6 + e^{t^4/4}$ D. $6 + c \cdot e^{t^4/4}$

   E. $6 + e^{t^4/4} + c$ **(2 p.)** A B C D E

2. Egy kádba sót szórunk, az elkeveredő só $y(t)$ mennyiségét a t idő függvényében az alábbi egyenlet írja le: $y'(t) = 0.05\,(20 - y(t))$. (A mennyiségeket SI-ben mérjük.)

   (a) Konstans megoldás:

   A. $y(t) \equiv 0$ B. $y(t) \equiv 20$ C. $y(t) \equiv 50$ D. van, de nem ezek E. nincs **(1 p.)** A B C D E

   (b) A nemkonstans általános megoldás implicit alakja (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges):

   A. $y(t) = 0.05\,(20y(t) - \frac{1}{2}y^2(t))$ B. $\ln|20 - y(t)| = 0.05\,t + c$

   C. $-\ln|20 - y(t)| = 0.05\,t + c$ D. $\dfrac{1}{(20 - y(t))^2} = 0.05\,t + c$ E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

   (c) A nemkonstans általános megoldás explicit alakja (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges):

   A. $y(t) = 0.05\,(20y(t) - \frac{1}{2}y^2(t))$ B. $y(t) = 20 + ce^{0.05\,t}$ C. $y(t) = 20 + ce^{-0.05\,t}$

   D. $y(t) = 20 + e^{0.05\,t} + c$ E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

   Ha itt a kezdeti $t = 0$ időpillanatban a só mennyisége 0 kg, akkor

   (d) az $y(t)$ megoldás:

   A. $y(t) = 0.05\,(20y(t) - \frac{1}{2}y^2(t))$ B. $y(t) = 20 - 20\,e^{0.05\,t}$ C. $y(t) = 20 - 20\,e^{-0.05\,t}$

   D. $y(t) = e^{0.05\,t}$ E. egyik sem **(1 p.)** A B C D E

   (c) hány másodperc múlva éri el a só mennyisége a 10 kg-ot?

   A. $20 \cdot \ln 2$ B. $-20 \cdot \ln 2$ C. $2 \cdot \ln 20$ D. 0 E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

3. Tegyük fel, hogy az előző feladatban a bejövő só mennyiségét lineárisan növeljük és a 0.05-ös rátát is módosítjuk, mindkettőt általánosan. Az egyenlet így az alábbira módosul: $y'(t) = b(1 + Rt) - R\,y(t)$, ahol $R, b > 0$ adott állandók.

   (a) A homogén egyenlet általános megoldása (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges):

   A. $y(t) + \frac{R}{2}y^2(t) = 0$ B. $y(t) = c\,e^{-Rt}$ C. $y(t) = c\,e^{Rt}$ D. $y(t) = 1 - c\,e^{Rt}$

   E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

   (b) Az inhomogén egyenlet $y(t)$ megoldása az alábbi alakban kereshető:

   A. $y(t) + \frac{R}{2}y^2(t) + bt$ B. $c(t)\,e^{Rt}$ C. $c(t)\,e^{-Rt}$ D. $c(t)\,e^{Rt} + bt$

   E. egyik sem **(1 p.)** A B C D E

   (c) A (b) pontbeli keresési alak behelyettesítéséből származó segédfeladat:

   A. $c'(t) = b - R\,c(t)$ B. $c'(t) = (c(t) - R)e^{-Rt} + b$ C. $c'(t) = b(1 + Rt)$

   D. $c'(t)e^{-Rt} = b(1 + Rt)$ E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

   (d) Összességében, az $y'(t) = b(1 + Rt) - R\,y(t)$ egyenlet általános megoldása (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges): $y(t) = \ldots$

   A. bt B. $bt + c\,e^{-Rt}$ C. $(bt + c)\,e^{-Rt}$ D. $bt + e^{Rt}$ E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

4. Elektromágneses rezgőkörökben az $I(t)$ áramerősséget a t idő függvényében az alábbi egyenlet írja le: $L\,I''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0.$ (A mennyiségeket SI-ben mérjük.) Legyen $L = 1$, $R = 5$, $C = 0.25$.

   (a) A karakterisztikus egyenlet gyökei:

   A. 1 és 4 B. -1 és -4 C. $5 \pm 4i$ D. 0 és -9 E. egyik sem **(1 p.)** A B C D E

   (b) Lineárisan független megoldások:

   A. e^t és e^{4t} B. e^{-t} és e^{-4t} C. $e^{5t}\cos 4t$ és $e^{5t}\sin 4t$ D. 1 és e^{-9t} E. egyik sem **(2 p.)** A B C D E

   (c) Az általános $I(t)$ megoldás (ahol c, ill. c_1 és c_2 tetszőleges konstans):

   A. $e^t + e^{4t} + c$ B. $c_1e^t + c_2e^{4t}$ C. $c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}$ D. $c_1e^{5t}\cos 4t + c_2e^{5t}\sin 4t$

   E. $1 + e^{-9t} + c$ **(2 p.)** A B C D E

   (d) Az $I(0) = 3$, $I'(0) = 0$ kezdeti feltételek akkor teljesülnek, ha

   A. $c_1 = 3,\ c_2 = 0.$ B. $c_1 = 3,\ c_2 = -1.$ C. $c_1 + c_2 = 3$ és $-c_1 - 4c_2 = 0.$

   D. $c_1 + c_2 = 3$ és $c_1 + c_2 = 0.$ E. egyik sem **(1 p.)** A B C D E

   (e) Az $I(0) = 3$, $I'(0) = 0$ kezdeti feltételeket teljesítő megoldás: $I(t) = ...$

   A. Nincs. B. $3e^{-t}$ C. $3e^t - e^{4t}$ D. $4e^{-t} - e^{-4t}$ E. egyik sem, de létezik. **(2 p.)** A B C D E