

Lineáris algebra (A, B, C)

1. előadás

(vázlat)

Bevezetőül lineáris egyenletrendszerekkel foglalkozunk. Mindenki találkozott már két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerekkel, most nézünk néhány „közeli” példát: három egyenletből álló három ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldásait keressük a valós számok körében (az ismeretlenek x, y, z , vagy x_1, x_2, x_3), majd négy ismeretlennel is próbálkozunk. A megoldás alapötlete az lesz, hogy az első egyenletben szereplő első ismeretlen segítségével (már ha tényleg szerepel, azaz együttthatója nem nulla) a többi egyenletből kiküszöböljük ezt az ismeretlent az első egyenlet alkalmas számszorosának hozzáadásával, majd ezt folytatjuk a következő ismeretlennel, stb. Ha ezt egy nulla együtttható akadályozná, cserélni próbálhatjuk az egyenleteket. A konkrét számolást esetleg megkönnyíti, ha a használandó nem nulla együttthatóval végigosztjuk (azaz reciprokával végigszorozzuk) az öt tartalmazó egyenletet. Ha már nem tudjuk folytatni, akkor alulról felfelé haladva visszahelyettesítéssel próbáljuk leolvasni a megoldást illetve megoldásokat. A vázolt eljárás neve Gauss-féle kiküszöbölés vagy latinosan Gauss-elimináció (angolul Gaussian elimination).

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x + 2y + 3z & = & 2 \\ x + 4y + 9z & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y + 2z & = & 1 \\ 3y + 8z & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y + 2z & = & 1 \\ 2z & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} z & = & -\frac{1}{2} \\ y & = & 2 \\ x & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ebben a példában **EGYETLEN MEGOLDÁS** adódott. Foglaljuk most össze, milyen átalakításokat engedünk meg:

1. Két egyenletet felcserélünk.
2. Az egyik egyenletet egy nullától különböző valós számmal végigszorozzuk.
3. Egyik egyenlethez egy másik egyenlet valós számszorosát hozzáadjuk.

A fenti példában persze az 1. átalakításra nem volt szükség, a 2. csak a végén volt (a visszahelyettesítés pedig 3. típusú). Hogy legvégül a megoldást kapjuk, az biztosítja, hogy a megengedett átalakításaink mindegyike ekvivalens átalakítás: az átalakítás utáni egyenletrendszernek pontosan ugyanazok a megoldásai, mint az átalakítás előttinek.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x_2 - x_3 & = & \frac{1}{2} \\ -x_2 - 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\ x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ -x_2 - 2x_3 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\ x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_3 & = & a \in \mathbb{R} \\ x_2 & = & -1 - 2a \\ x_1 & = & 2 + a \end{array}$$

Ebben a példában az x_3 -ra nem adódott külön megkötés, x_3 ún. szabad változó, ezért választhattuk őt tetszőleges a valós számnak, ezzel pedig már kifejezhetjük a többit. **VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS** adódott!

$$\begin{array}{rcl}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 1 \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 2 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 2 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}x_2 - x_3 & = & \frac{1}{2} \\
-x_2 - 2x_3 & = & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\
x_2 + 2x_3 & = & -1 \\
-x_2 - 2x_3 & = & -1
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\
x_2 + 2x_3 & = & -1 \\
0 & = & -2
\end{array}
\quad \text{NINCS MEGOLDÁS!}$$

A következő egyenletrendszer nagyon hasonlít a legelsőhöz, mégis változik a helyzet:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 2 \\
x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 & = & 3
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\
3x_2 + 8x_3 + 15x_4 & = & 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\
2x_3 + 6x_4 & = & -1
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\
x_3 + 3x_4 & = & -\frac{1}{2}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x_4 & = & a \in \mathbb{R} \\
x_3 & = & -\frac{1}{2} - 3a \\
x_2 & = & 2 + 3a \\
x_1 & = & -\frac{1}{2} - a
\end{array}$$

Végtelen sok megoldás adódott. Ennek alapján már mindenki maga gyárthat olyan lineáris egyenletrendszert, amelyben több szabad változó is van. Szabad változó nemcsak a „végén” lehet:

$$\begin{array}{rcl}
x + y + z & = & 1 \\
x + y + 2z & = & 2 \\
x + y + 3z & = & 3
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x + y + z & = & 1 \\
z & = & 1 \\
2z & = & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x + y + z & = & 1 \\
z & = & 1 \\
0 & = & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
z & = & 1 \\
y & = & a \in \mathbb{R} \\
x & = & -a
\end{array}$$

A fentiekben előfordult $0 = 0$ „fölösleges” sor, viszont a $0 = -2$ ún. „tiltott” vagy „tilos” sor. A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy ilyen tiltott sor ne forduljon elő. Végül még táblázatokba rendezhetjük a megoldások leolvasása előtti egyenletrendszerek együtthatóit, kiírva a nullákat is, szaggatott vonallal elkülönítve kiírjuk a jobb oldali számokat is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right]
\quad
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
\quad
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1/2 \end{array} \right]
\quad
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ezek mindegyike ún. LÉPCSŐS ALAK (echelon form). Lehetne még „felfelé” is kiküszöbölni, eredménye REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK (reduced echelon form). A fentiek részletesebben (és általánosabban) is olvashatók FREUD RÓBERT: LINEÁRIS ALGEBRA c. könyvében (ELTE Eötvös Kiadó) a 3. fejezetben. Ott ugyan szerepel átalakításként a fölösleges sor elhagyása is, de most az volt a célunk, hogy a táblázat-alak ne változzon az átalakítások során. Más célok esetén más kisebb-nagyobb eltérések is lehetnek

a Gauss-elimináció tárgyalása során. GERGÓ LAJOS: NUMERIKUS MÓDSZEREK c. könyvében (ELTE Eötvös Kiadó), mely a II. éves „Numerikus módszerek” c. tárgy jegyzete, a 2. átalakítás nem szerepel, hiszen arra valójában nincs szükség. Most azért szerepeltettük mégis, hogy egy későbbi számolási szabály (elemi bázistranszformáció) már ismerős legyen. (Eltérés a lépcsős alak definíciójában is előfordul, pl. David M. Bloom, Linear Algebra and Geometry (Cambridge University Press) könyvében.)

Most még írjuk fel a három egyenletből álló négy ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakját:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

Itt az a_{ij} együtthatók és a b_i -k adott valós számok. Ha $a_{11} \neq 0$, akkor elkezdhetjük a fenti átalakításokat, de a folytatás lehetősége már az elején is áttekinthetetlen a csúf együtthatók miatt:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 & x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21})x_3 + (a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}}a_{21})x_4 &= (b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}) \\ (a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31})x_2 + (a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31})x_3 + (a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{11}}a_{31})x_4 &= (b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31}) \end{aligned}$$

Később n egyenlet és m ismeretlen esetére is szeretnénk áttekintést adni a megoldásokról (ha vannak), többek között tisztázzuk majd, mikor lehet a legelső példához hasonlóan végigcsinálni a Gauss-eliminációt úgy, hogy pontosan egy megoldás adódjon.

Előkészítésül felelevenítjük a középiskolában a térvektorokról tanultakat. A „tér-” jelző pusztán a későbbi általánosításoktól való megkülönböztetésre szolgál. Ha A és B a geometriai tér tetszőleges pontjai, akkor az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt \overrightarrow{AB} -vel jelöljük, ennek hossza $|\overrightarrow{AB}|$, speciálisan $|\overrightarrow{AA}| = 0$, \overrightarrow{AA} iránya tetszőleges. Két irányított szakaszt akkor tekintünk egyenlőnek, ha kezdőpontjuk is, végpontjuk is egyezik. Az irányított szakaszokat vektoroknak is hívjuk, de a vektorok egyenlőségének definíciója más: két irányított szakasz, mint vektor akkor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik. Jelölések: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ térvektorok, az \mathbf{a} hossza $|\mathbf{a}|$.

Műveletek térvektorokkal: összeadás a vektorok egymáshoz illesztésével (vagy parallelogramma-szabállyal), valós számmal („skalárral”) való szorzás. Nullvektor: $\mathbf{0}$, \mathbf{a} ellentettje: $(-\mathbf{a})$, az \mathbf{a} -val azonos hosszúságú, de vele ellentétes irányú vektor.

Műveleti tulajdonságok (BIZONYÍTHATÓK): $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (a vektorösszeadás kommutativitása); $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asszociativitás); $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$; $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$; $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ („asszociativitás”); $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ és $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (a két disztributivitás); $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Tételkék: $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \exists! \mathbf{x}$, melyre $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$, jelölése $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ („vég mínusz kezdet”). $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$. Háromszögegyenlőtlenségek: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$.

Térvektorok párhuzamosságának definíciója természetes, de az egysíkúsággal vigyázni kell! Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \dots$ térvektorok egysíkúak, ha elhelyezhetők (felrajzolhatók) egy síkban. SÍKBELI TÉTEL: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}$ térvektorok; $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}$ egysíkúak $\Rightarrow \exists! \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy \mathbf{a}, \mathbf{b} „bázis a síkban”, továbbá, hogy a \mathbf{v} koordinátái az \mathbf{a}, \mathbf{b} bázisban α, β .

TÉRBELI TÉTEL: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ térvektorok; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nem egysíkúak $\Rightarrow \exists! \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ „bázis a térben”, továbbá, hogy a \mathbf{v} koordinátái az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bázisban α, β, γ . Jelölése: $[\mathbf{v}]_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ térvektorrendszer [rövidítve: tvr; a „rendszer” arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ együtthatós **LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA**

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{a}_k.$$

Az eredmény egy térvektor (a kifejezést azért nem zárójeleztük, mert a térvektorok összeadásának asszociativitásából bebizonyítható, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelvezhető). Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr **TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA:** $0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_k$. Bármely tvr triviális lineáris kombinációja $= \mathbf{0}$.

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr **LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ** (rövidítve: Ö), ha $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr **LINEÁRISAN FÜGGETLEN** (rövidítve: L), ha $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \dots + \mu_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).