2008. február 19.

Lineáris algebra (A, B, C)
2. előadás
(vázlat)

Emlékeztető:
DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ térvektorrendszer [rövidítve: tvr; a „rendszer” arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ tvr $\lambda_1, ..., \lambda_k$ együtthatós LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k.$$

Az eredmény egy térvektor (a kifejezést azért nem zárójeleztük, mert a térvektorok összeadásának asszociativitásából bebizonyítható, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelezhető).
Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ tvr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA: $0\mathbf{a}_1 + ... + 0\mathbf{a}_k$. Bármely tvr triviális lineáris kombinációja $= \mathbf{0}$.
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ tvr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ tvr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + ... + \mu_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).
A második fogalom az előző tagadásaként adódik, azért részleteztük mégis, mert veszélyes: sokan hajlamosak $\Rightarrow$ helyett $\Leftarrow$-t gondolni, pedig utóbbi mindössze annyi, hogy a triviális lineáris kombináció nullvektor.
Gyakorlásul célszerű végiggondolni a következő, térvektorokra vonatkozó állítások bizonyítását.
$\mathbf{a}_1$ Ö $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$;
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ Ö $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$;
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ Ö $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ egysíkúak;
$\mathbf{a}_1$ L $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$;
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ L $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$;
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ L $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ nem egysíkúak;
$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ tvr; $k \geqq 4\} \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ Ö.
A fentiek szerint térvektorok esetén $|L| \leqq 3$, ahol egyenlőség is előfordulhat. Ezt úgy is fogjuk mondani, hogy terünk „három dimenziós”.
Térvektorok hajlásszöge: $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [0, \pi]$.
DEFINÍCIÓ: Térvektorok skaláris szorzata: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
A térvektorok skaláris szorzatának műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra illetve λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):
$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (kommutativitás);
$\mathbf{ab} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (utóbbiba beleértendő az is, ha egyik vektor nullvektor) – [ez igen VESZÉLYES tulajdonság: a skaláris szorzat NEMCSAK triviálisan adhat nullát, ami lényeges eltérés az $\mathbb{R}$-beli szorzáshoz képest];
$\lambda(\mathbf{ab}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége);
$(\mathbf{ab})\mathbf{c} \overset{ált}{\neq} \mathbf{a}(\mathbf{bc})$,
$\mathbf{cc} = |\mathbf{c}|^2 \geqq 0$;

$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba}+\mathbf{ca}$ (disztributivitás).
[A bizonyítás az alábbi segédtételek révén történhet.
1.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a}$ tetszőleges $\Rightarrow \exists!\, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_m \,:\, \mathbf{a}_p \parallel \mathbf{e}$, $\mathbf{a}_m \perp \mathbf{e}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_m$.
2.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a}$ tetszőleges $\Rightarrow \mathbf{a}_p = (\mathbf{ea})\mathbf{e}$.
3.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ tetszőleges $\Rightarrow$ $(\mathbf{b}+\mathbf{c})_p = \mathbf{b}_p + \mathbf{c}_p$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})_m = \mathbf{b}_m + \mathbf{c}_m$.
Az $\mathbf{a}$-val párhuzamos $\mathbf{e}$-t véve, a 3. Segédtételt és (háromszor) a 2. Segédtételt alkalmazva először $(\mathbf{e}(\mathbf{b}+\mathbf{c}))\mathbf{e} = (\mathbf{eb})\mathbf{e} + (\mathbf{ec})\mathbf{e}$, majd $\mathbf{e}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{eb}+\mathbf{ec}$ adódik, amit alkalmas skalárral kell még megszoroznunk. Végiggondolandó közben, hogy mely disztributivitásokat használtuk fel (jogosan?)!]
Skaláris szorzat kiszámítása lineáris kombinációk esetén: Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ térvektorok a koordinátáikkal adottak egy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bázisban (3 elemű, nem egysíkú tvr):

$$[\mathbf{u}]_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3} = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}.$$

Ekkor a (több tagra is igazolható) disztributivitás és a skalár kiemelhetőségének felhasználásával:

$$\begin{gathered}\mathbf{uv} = (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3)(\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_3\mathbf{a}_3) = \\ \alpha_1\beta_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \alpha_1\beta_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \alpha_1\beta_3\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \\ \alpha_2\beta_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 + \alpha_2\beta_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \alpha_2\beta_3\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \\ \alpha_3\beta_1\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \alpha_3\beta_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2 + \alpha_3\beta_3\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3.\end{gathered}$$

Látható, hogy akkor kapunk könnyebben megjegyezhető kifejezést, ha az $\mathbf{a}_i$-k páronként merőleges vektorok, s még kellemesebb, ha egységvektorok (a hosszuk 1). A középiskolában már megszokott jelöléssel: Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok (és ún. jobbrendszert alkotnak, bár erre most nincs szükség), akkor

$$[\mathbf{u}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \text{ és } \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$$

esetén

$$\mathbf{uv} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

továbbá

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{uu} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \text{ és } |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{vv} = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

Ha még feltesszük, hogy $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hajlásszögüket kiszámíthatjuk az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátákból:

$$\cos\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nem egysíkú térvektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha – közös kezdőponttal felrajzolva őket, a kezdőpontban az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjára emelt merőlegesen (mint forgástengelyen) – a $\mathbf{c}$-t tartalmazó féltérből nézve pozitív irányú, $0°$ és $180°$ közötti forgatással vihetjük át az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$-t a $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$-be.
DEFINÍCIÓ: Térvektorok VEKTORIÁLIS szorzata: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ VEKTOR („$\mathbf{a}$ kereszt $\mathbf{b}$"):
1./ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2./ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$;
3./ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$ esetén $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszer.
A térvektorok vektoriális szorzatának műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra és λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$;
$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (alternálás vagy antikommutativitás), így $\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b}$ esetén $\mathbf{b}\times\mathbf{a}\neq\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (tehát a vektoriális szorzat nem kommutatív);
$\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége);
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ (disztributivitás).
[A disztibutivitás bizonyítása a korábbi három segédtétel felhasználásával történhet, kiegészítve azzal, hogy $|\mathbf{e}|=1$ esetén tetszőleges $\mathbf{a}$-ra $\mathbf{a}_m=(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$, ezt pedig az $\mathbf{e}$ irányából nézve $+90°$-os forgatással átvihetjük $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$-ba (ezzel kerülhető el a bizonyítandó állítás felhasználása).]
Ha $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok és jobbrendszert alkotnak, akkor $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$ mind könnyen ellenőrizhető, és

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix},\quad [\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}\text{ és }\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}+\beta_3\mathbf{k}$$

esetén a (több tagra is igazolható) disztributivitás és a skalár kiemelhetőségének felhasználásával

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{k}$$

adódik. Ezt felhasználhatjuk pl. a
KIFEJTÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{bc})\mathbf{a}$
és a
FELCSERÉLÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
bizonyítására. Előbbiből ki lehet mutatni, hogy a vektoriális szorzat nem asszociatív! Utóbbiban előfordult vegyesen a vektoriális és a skaláris szorzat, szokás is definiálni (de a jelölés veszélyes):
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ térvektorok vegyes szorzata: „$\mathbf{abc}$”$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$.
Belátható, hogy a nem egysíkú $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ térvektorok vegyes szorzata megegyezik az általuk kifeszített parallelepipedon előjeles térfogatával (jobbrendszernél $+$, különben $-$ előjellel). Érdemes még kiemelni az „elfajuló” esetet: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=0\Leftrightarrow\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ egysíkú. Ezek szerint: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}\neq0\Leftrightarrow\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ L.