Analízis mérnököknek / fizikusoknak 1. zh. Mo 2017. okt. 17

1. a) $$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \to \underline{\underline{1}}$$ rendőr-elv miatt,

ui.:

$$\sqrt{n} \le \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \le \sqrt{2n}+\sqrt{n} \le 3\sqrt{n}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}}_{\substack{\downarrow\\1}} \ge \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \ge \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{3}\sqrt{\sqrt[n]{n}}}}_{\substack{\downarrow\\1}}$$

b)

$$\underbrace{1+5+\ldots+(4n-3)}_{\text{számtani sorozat}} = (4n-2)\cdot\frac{n}{2} = (2n-1)\,n = 2n^2-n$$

$$\frac{\left(1+5+\ldots+(4n-3)\right)^n}{(2n^2+n)^n} = \left(\frac{2n^2-n}{2n^2+n}\right)^n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n = \left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^n = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{2n+1} \to e^{-2}}{\left(1-\frac{2}{2n+1}\right) \to 1}} \to$$

$$\to \sqrt{e^{-2}} = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

c) $$c_n = \frac{\sqrt[n]{n!}+\left(\sqrt{5}\right)^{2n}+\binom{n}{2}}{n\cdot\sin(n!)+4^n} = \frac{\sqrt[n]{n!}+5^n+\frac{n(n-1)}{2}}{n\cdot\sin(n!)+4^n} = \frac{\underbrace{\frac{\sqrt[n]{n!}}{4^n}}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{5}{4}\right)^n}_{\to+\infty}+\underbrace{\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{4^n}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{n\cdot\sin(n!)}{4^n}}_{\to 0}+1} \to \underline{\underline{+\infty}}$$

ui.: $\sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n]{n^n} = n \ll 4^n$, $\frac{5}{4}>1 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n \to \infty$, $n^2 \ll 4^n$, $\sin(n!)$ korl.

Küszöbindex:
Legyen $K>0$. Kell $N=N(K)$, h. $\forall n>N$ esetén $c_n>K$.

$$c_n > \frac{5^n}{n+4^n} > \frac{5^n}{4^n+4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n > K \text{ elég}$$

$\boxed{n\sin(n!) \le n}$

$n<4^n \quad \forall n\in\mathbb{Z}^+$ teljes ind-val bizonyítható

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n > 2K$$

$$n\ln\left(\frac{5}{4}\right) > \ln(2K)$$

$$n > \frac{\ln(2K)}{\ln(5/4)} = N(K) \checkmark$$

$n=1$: $1<4^1$ ✓

Tfh $n<4^n$. Ekkor $n+1 < 4^n\cdot\frac{n+1}{n} < 4^{n+1}$ ui.

$$\frac{n+1}{n} < 4$$

$$n+1 < 4n$$

$$1 < 3n \checkmark$$

(2.) • Ha $\exists$ véges határérték $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$A = \frac{1}{2-A}, \quad 2A - A^2 = 1, \quad A^2 - 2A + 1 = 0, \quad (A-1)^2 = 0, \quad \underline{\underline{A = 1}}.$$

• Lássuk be, h. valóban $\exists$ véges határérték.
Ehhez elég belátni pl. azt, h. a_n mon nő és felülről korlátos.
(azt sejtjük, h. ez igaz)

Áll $a_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Biz teljes ind-val

• $n = 1$: $a_1 = \frac{1}{4} \le 1$ ✓

• Tfh $a_n \le 1$. Ekkor $a_{n+1} = \dfrac{1}{2-a_n} \le 1$, mivel

$2 - a_n \ge 1$.

Áll a_n monoton nő, azaz $a_{n+1} \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Biz $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2-a_n} - a_n = \dfrac{1 - 2a_n + a_n^2}{2-a_n} \ge 0$ mivel

$1 - 2a_n + a_n^2 = (a_n - 1)^2 \ge 0$, és $a_n \le 1$ miatt $2 - a_n \ge 1 > 0$.

(3.) Csak akkor lehet differenciálható, ha folyt is $\forall$hol.

• f folyt $x = 0$-ban $\Leftrightarrow f(0-) = f(0) = f(0+)$

$$\boxed{f(0+) = \lim_{x\to 0+} f(x)}$$

$$A \cdot \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0} + B\frac{-1}{1} = A \cdot \operatorname{arctg} 0 + B\frac{-1}{1} + \lim_{x \to 0+}\left(1 + \underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0} \underbrace{\sin(\sqrt{x})}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{1}}$$

$$-B = -B = 1$$

Így f folyt $x = 0$-ban $\Leftrightarrow \underline{\underline{B = -1}}$

• A folytonossággal sajnos $x = -1$-ben is gond lehet, hiszen $B \ne 0$ esetén nem <u>értelmezett</u>

$$\left(\text{ráadásul } \lim_{x\to -1+} \frac{(x-1)^{-2}}{\underbrace{(x+1)}_{\to 0+}} = -\infty \ne \lim_{x \to -1-} \frac{(x-1)^{-2}}{\underbrace{(x+1)}_{\to 0-}} = +\infty\right)$$

f $x = -1$-ben csak akkor lehet folytonos, ha $\underline{\underline{B = 0}}$, különben értelmezve sincsen.

Így f semmilyen $A, B \in \mathbb{R}$ esetben nem lesz $\forall$hol diffható, mivel még csak nem is folyt. $\forall$hol.

• Ha az lett volna a kérdés, h. milyen $A, B \in \mathbb{R}$ esetén lesz f az $x=0$-ban diffható, akkor így kellene folytatni:

• f diffható $x=0$-ban $\iff$ f folyt $x=0$-ban, azaz $\underline{\underline{B=-1}}$, és $\underline{\underline{f'_+(0) = f'_-(0)}}$ azaz a bal és jobboldali derivált megegyezik.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - 1}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{1}}$$

$$f'_-(0) = \Bigg(\underbrace{A \operatorname{arctg} 3x - \frac{x-1}{x+1}}_{\text{mivel ez a fv}}\Bigg)'\Bigg|_{x=0} = \frac{A}{1+(3x)^2}\cdot 3 - \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\Bigg|_{x=0} = \underline{\underline{3A-2}}$$

diffható $x=0$-ban, így itt nem muszáj határértékkel számolni.

Így f diffható $x=0$-ban $\iff$ $B=-1$ és $1=3A-2 \iff \underline{\underline{B=-1 \text{ és } A=1}}$.

(4.) $f(x) = \sqrt{x}^{\ln\sqrt{x}}$, $\quad \underline{\underline{f(e^2)}} = e^{\overbrace{\ln e}^{1}} = e^1 = \underline{\underline{e}}$

$$f(x) = \left(e^{\ln\sqrt{x}}\right)^{\ln\sqrt{x}} = e^{(\ln\sqrt{x})^2}, \text{ így } \underline{\underline{f'(x) = e^{(\ln\sqrt{x})^2}\cdot 2\underbrace{\ln\sqrt{x}}_{\frac{1}{2}\ln x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}}$$

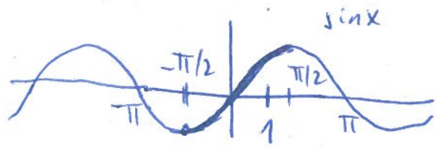
így $f'(e^2) = e^{\overbrace{(\ln e)^2}^{1}} \underbrace{\ln e}_{1}\cdot\frac{1}{e^2} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$

Érintőegyenes egyenlete: $y - y_0 = m(x-x_0)$ azaz

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ azaz $\underline{\underline{y = e + \frac{1}{e}(x-e^2)}}$

azaz $\underline{\underline{y = \frac{x}{e}}}$.

5. • $f(x) = \sin(1+x^3)$ Maximális $(-a,a)$, amin invertálható?

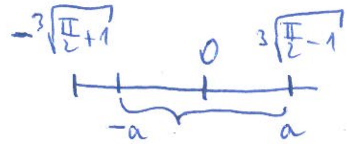


$x=0$ esetén $1+0^3=1$, ezt tartalmazó max intervallum, amin $\sin x$ inv-ható! $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

x^3 szig mon nő, így $-\frac{\pi}{2} \le 1+x^3 \le \frac{\pi}{2}$ esetén lesz $f(x)$ invertálható

$$-\frac{\pi}{2} - 1 \le x^3 \le \frac{\pi}{2} - 1$$

$$-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+1} \le x \le \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}-1}$$



$0 < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}-1} < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+1}$, így $(-a,a) = \left(-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}-1}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}-1}\right)$ a max. 0 körüli szimmetrikus nyílt intervallum, amin $f(x)$ invertálható.

• $f(x) = \sin(1+x^3) = y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, így

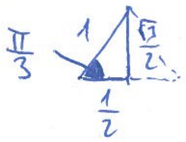
$$1+x^3 = \arcsin y$$

$$x^3 = \arcsin y - 1$$

$$x = \sqrt[3]{\arcsin y - 1} = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3}(\arcsin y - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\frac{\pi}{3}} - 1\Big)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}_{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)^{-\frac{2}{3}}$$



$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ így is számolható: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$$f'(x) = \cos(1+x^3) \cdot 3x^2$$

$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$ $\quad f(x) = \sin(\underbrace{1+x^3}_{\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1+x^3 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$$x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}-1}$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}} \cdot 3\left(\frac{\pi}{3}-1\right)^{2/3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)^{-2/3}$$