

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}}{\sin^2 \left(\frac{1}{n}\right)} = ?$       (2) Írjuk fel a  $2^x$  függvény  $x_0 = 1$  körüli harmadfokú Taylor polinomját!

(3)  $\int_0^1 \arcsin x \, dx = ?$       (4)  $\int e^{2x} \sqrt{1 + e^x} \, dx = ?$       (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+2} = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 3+2+4+2+4+2+(4)=17+(4) pont. 15pont=100%

- Mit értünk az alatt, hogy az  $f(x)$  függvény határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban a véges  $A \in \mathbb{R}$  szám? És az alatt, hogy a határértéke  $+\infty$ ?
- Mit értünk az alatt, hogy egy függvény egy intervallumon egyenletesen folytonos?
- Mit mond ki Rolle tétele? Vázolja a bizonyítás alagondolatát!
- Mutassunk példát olyan korlátos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amely *nem* Riemann-integrálható. Rövid indoklást is kérünk.
- (a) Igaz-e, hogy ha a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ? Ha igen, miért? Ha nem, miért?  
(b) Igaz-e, hogy ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens? Ha igen, miért? Ha nem, miért?
- (a) Hogyan számolhatjuk ki egy polárkoordinátákban adott szektorszerű tartomány területét? (Milyen felételek mellett?)  
(b)\* Próbáljuk kitalálni, hogy hogyan számolhatóak ki egy polárkoordinátákban adott szektorszerű tartomány súlypontjának polárkoordinátái!

## II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}}{\sin^2 \left(\frac{1}{n}\right)} = ?$       (2) Írjuk fel a  $2^x$  függvény  $x_0 = 1$  körüli harmadfokú Taylor polinomját!

(3)  $\int_0^1 \arcsin x \, dx = ?$       (4)  $\int e^{2x} \sqrt{1 + e^x} \, dx = ?$       (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+2} = ?$

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 3+2+4+2+4+2+(4)=17+(4) pont. 15pont=100%

- Mit értünk az alatt, hogy az  $f(x)$  függvény határértéke az  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontban a véges  $A \in \mathbb{R}$  szám? És az alatt, hogy a határértéke  $+\infty$ ?
- Mit értünk az alatt, hogy egy függvény egy intervallumon egyenletesen folytonos?
- Mit mond ki Rolle tétele? Vázolja a bizonyítás alagondolatát!
- Mutassunk példát olyan korlátos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amely *nem* Riemann-integrálható. Rövid indoklást is kérünk.
- (a) Igaz-e, hogy ha a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ? Ha igen, miért? Ha nem, miért?  
(b) Igaz-e, hogy ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens? Ha igen, miért? Ha nem, miért?
- (a) Hogyan számolhatjuk ki egy polárkoordinátákban adott szektorszerű tartomány területét? (Milyen felételek mellett?)  
(b)\* Próbáljuk kitalálni, hogy hogyan számolhatóak ki egy polárkoordinátákban adott szektorszerű tartomány súlypontjának polárkoordinátái!

## II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: KÉT SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP + kiadott deriválttáblázat

Munkaidő: 80 perc. Pontozás: 10+7+10/10+15=42 pont, 35pont=100%

3a és 3b közül az egyik oldandó meg.

- $f(x) = \frac{3\sin x - 5}{\sin x - 2}$ .
  - Adjunk meg egy maximális  $x = 0$ -t tartalmazó intervallumot, ahol  $f$  invertálható, és ott adjuk meg az inverzfüggvényt!
  - Adjuk meg  $f$  értelmezési tartományát és értékkészletét!
  - Mennyi az inverzfüggvény deriváltja a  $\frac{7}{3}$  pontban? Számoljuk ezt ki kétféleképpen!
  - Létezik-e  $f$ -nek maximum és minimum helye a teljes értelmezési tartományon? Ha igen, hol?
  - Létezik-e  $f$ -nek maximum és minimum helye a  $[0, \frac{\pi}{2}]$  intervallumon? Ha igen, hol?
- Az  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$  függvény grafikonja és az  $x = 0, x = 1, y = \frac{\pi}{2}$  egyenesek által határolt tartományt az  $x$  tengely körül megforgatva mennyi a keletkező forgástest térfogata?
- (a)  $\int \frac{2x^5+4}{x^4-1} dx = ?$   
(b) Adjuk meg az  $y' \sin x = y \ln y$  differenciálegyenlet általános megoldását és az  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$  illetve az  $y(\frac{\pi}{2}) = e$  kezdeti feltételhez tartozó megoldást.
- (a) Konvergens vagy divergens?  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$   
(b) Konvergens vagy divergens?  $\frac{2^n n!}{n^n}$   
(c)  $x = 1$  és  $x = -1$  esetén állapítsuk meg, az alábbi sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens, vagy divergens!  
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \ln n}$   
(d) Konvergens vagy divergens?  $\int_0^{\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx$

## I. RÉSZ A HÁTOLDALON.

## II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: KÉT SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP + kiadott deriválttáblázat

Munkaidő: 80 perc.

Munkaidő: 80 perc. Pontozás: 10+7+10/10+15=42 pont, 35pont=100%

3a és 3b közül az egyik oldandó meg.

- $f(x) = \frac{3\sin x - 5}{\sin x - 2}$ .
  - Adjunk meg egy maximális  $x = 0$ -t tartalmazó intervallumot, ahol  $f$  invertálható, és ott adjuk meg az inverzfüggvényt!
  - Adjuk meg  $f$  értelmezési tartományát és értékkészletét!
  - Mennyi az inverzfüggvény deriváltja a  $\frac{7}{3}$  pontban? Számoljuk ezt ki kétféleképpen!
  - Létezik-e  $f$ -nek maximum és minimum helye a teljes értelmezési tartományon? Ha igen, hol?
  - Létezik-e  $f$ -nek maximum és minimum helye a  $[0, \frac{\pi}{2}]$  intervallumon? Ha igen, hol?
- Az  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$  függvény grafikonja és az  $x = 0, x = 1, y = \frac{\pi}{2}$  egyenesek által határolt tartományt az  $x$  tengely körül megforgatva mennyi a keletkező forgástest térfogata?
- (a)  $\int \frac{2x^5+4}{x^4-1} dx = ?$   
(b) Adjuk meg az  $y' \sin x = y \ln y$  differenciálegyenlet általános megoldását és az  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$  illetve az  $y(\frac{\pi}{2}) = e$  kezdeti feltételhez tartozó megoldást.
- (a) Konvergens vagy divergens?  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$   
(b) Konvergens vagy divergens?  $\frac{2^n n!}{n^n}$   
(c)  $x = 1$  és  $x = -1$  esetén állapítsuk meg, az alábbi sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens, vagy divergens!  
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \ln n}$   
(d) Konvergens vagy divergens?  $\int_0^{\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx$

## I. RÉSZ A HÁTOLDALON.