Analízis fizikusoknak/mérnököknek vizsga 2018. jan. 12. Mo

1.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4+n^2}-n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2-n^4}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

2.

$f(x)$ $x=0$-n kívül mindenhol diffható.

$\underline{x=0\text{-ban}}$ csak akkor lehet diffható, ha folytonos is.

$f(x)$ $x=0$-ban folyt $\iff \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0-} e^{-2x} = \lim_{x\to 0+} Ax+B = e^0 = 1$$

$1 = \underline{\underline{B=1}}$ esetén lesz f 0-ban folytonos.

A diffhatósághoz a folyt nem elég, kell még

$$f'_-(0) = f'_+(0)$$

$$\left.(e^{-2x})'\right|_{x=0} = \left.(Ax+B)'\right|_{x=0}$$

$$\left.-2e^{-2x}\right|_{x=0} = \left.A\right|_{x=0}$$

$$\underline{\underline{-2=A}}$$

f diffható 0-ban (és ∀hol) $\iff$ $\underline{\underline{A=-2 \text{ és } B=1}}$.

3.

1. Mo

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^{tg x}}{\cos^2 x}\,dx = \left[e^{tg x}\right]_0^{\pi/4} = e^{\overset{1}{tg \frac{\pi}{4}}} - e^{\overset{0}{tg 0}} = \underline{\underline{e-1}}$$

$$\underline{\underline{(tg x)'}} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x-(-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}$$ (ezt fejből is illik már tudni)

Tudjuk, h. $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$

2. Mo (helyettesítéssel)

$t = tg x$

$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{e^{tg x}}{\cos^2 x}\,dx = \int_{tg 0}^{tg(\frac{\pi}{4})} e^t \cdot \frac{dt}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int_0^1 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = \underline{\underline{e-1}}$$

(4.)
$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int x\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - 2\int\frac{x^2}{1+x^2} =$$
$$= \underline{\underline{x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C}}$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underline{\underline{x - \mathrm{arctg}\,x}} + C_1$$

(5.)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n}}{5^{n+3}} = \frac{1}{5^3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{5^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+2} = \frac{1}{5^3}\left(\frac{4}{5}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$k=n-2$
$n=k+2$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ |q|=\left|\frac{4}{5}\right|<1}}{=} \frac{16}{5^5}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{4}{5}}}_{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{16}{5^4}}} = \underline{\underline{\frac{16}{625}}}$$

Megj.: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q|<1$

Tfh $|q|<1$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q+q^2+\dots = q(1+q+q^2+\dots) = q\sum_{n=0} q^n = \frac{q}{1-q}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^n = q^2+q^3+\dots = q^2(1+q+q^2+\dots) = q^2\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q^2}{1-q}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} q^n = \frac{q^3}{1-q}$$, stb , ha $|q|<1$.

Megj. A köv áll is használható

Áll Ha $|q|<1$, akkor $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = a_1(1+q+q^2+\dots) = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Fenti pl-ban
$$\frac{1}{5^3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{5^3}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\dots\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{5^3}\left(\frac{4}{5}\right)^2}_{\frac{4^2}{5^5}}\left(1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\dots\right) = \frac{4^2}{5^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{4^2}{5^5}\,\frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{4^2}{5^4} = \frac{16}{625}$$

Elmélet 1/2

(1.) $n^3 \ll 3^n \ll n! \ll \left(\frac{n}{2}\right)^n \ll n^n$

Indoklás $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{3^n \ln 3} = \lim \frac{6n}{3^n(\ln 3)^2} = \lim \frac{6}{3^n(\ln 3)^3} = 0$

$\lim \frac{3^n}{n!} = 0$ mivel $\frac{3\cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n} \leq \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{n} \to 0$

$\lim \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0$

Legnehezebb: $\lim \underbrace{\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}}_{a_n} = 0$, mert $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}}{\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\,2$

$= \lim \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} = L < 1$

$\Rightarrow \lim a_n = 0$.

(2.)

a) IGAZ, ha $\lim a_n = A$, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz, így pl. $\varepsilon = 1$-hez is $\exists N > 0$, h.

$|a_n - A| < 1$, azaz $a_n \in (A-1, A+1)$, ha $n > N$.

$m := \min\{a_1, \dots, a_N, A-1\}$ alsó
$M := \max\{a_1, \dots, a_N, A+1\}$ felső
korlátja a sorozatnak.

b) NEM pl. $(-1)^n$ korl, nem konv

c) NEM pl. $\frac{(-1)^n}{n}$ konv, de nem monoton

d) NEM pl. n monoton, de nem konv.

e) IGAZ konv $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$, h. $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$

spec $\frac{\varepsilon}{2} > 0$-hoz is — || — $< \frac{\varepsilon}{2}$.

Így, ha $n, m > N$, akkor $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\underset{\Delta \text{ egy}}{\Rightarrow}$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

f) $\mathbb{R}$-ben igaz ($\mathbb{Q}$-ban nem)

Cauchy sorozat $\Rightarrow$ korlátos $\Rightarrow$ $\exists$ konv részsorozata: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. (*)
($\exists n_k \nearrow, \exists A$)

Ekkor a teljes sorozat is A-ba tart, mivel $|a_n - A| < \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

ha n és k elég nagy.
a_n Cauchy miatt, (*) miatt

Megj: $\mathbb{Q}$-ban nem igaz.

pl ~~Határ~~ $a_n \nearrow \sqrt{2}$, $a_n \in \mathbb{Q}$ esetén

a_n Cauchy, de $\lim a_n \notin \mathbb{Q}$.

③ a) 1. def $f(x)$ fv folyt $x=x_0$-ban, ha $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

2. def $f(x)$ —||— , ha (x_0 torl. pontja D_f-nek és $x_0 \in D_f$)

és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

folyt $\not\Leftarrow$ diffható

b) NEM $f(x)=|x|$ $x=0$-ban folyt, de nem diffható $\begin{matrix} f'_-(0)=-1 \\ f'_+(0)=1 \end{matrix}$ # .

IGEN diffható $\Rightarrow$ folyt

mivel: diffható $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}\ \exists$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{0} \cdot f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

---

④ Tfh f és g diffható x_0 egy környezetében.

Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim g(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, —||—

Biz $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} g = 0$ esetén

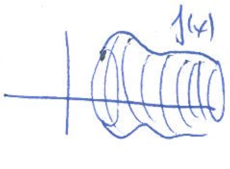
$f(x_0) := 0$, $g(x_0) := 0$, ha korábban nem is volt ott értelmezve.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A \quad \square.$$

$\exists t$ x és x_0 között ((Cauchy-tétel)) $\rightsquigarrow t\to x_0$, ha $x\to x_0$.

⑤ Igaz, mivel $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ primitív fv-e f-nek (a,b)-n, ha $f\in C(a,b)$, mivel ilyenkor $F'(x)=f(x)$

⑥ $$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$, ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ ~~[illegible]~~ folyt-an diffható.



Ebbe a két határoló körlemez területe nincsen beleszámolva!

(1.) $f(x) = e^{4x^3+3x^4}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{4x^3+3x^4}(12x^2+12x^3) = \underbrace{e^{4x^3+3x^4}}_{>0}\underbrace{12x^2}_{\geq 0}(1+x) = 0 \iff \underline{\underline{x=0}} \text{ v. } \underline{\underline{x=-1}}$$

Így $f'(x) \geq 0 \iff 1+x \geq 0 \iff x \geq -1$

Így

x		-1		0	
f'	$\ominus$	0	$\oplus$	0	$\oplus$
f	$\searrow$	lok min hely	$\nearrow$		$\nearrow$

$\rightsquigarrow$ táblázat szerint egyben globális min. hely

Innen adódik, h. $\underline{\underline{[-1,+\infty)}}$ a maximális 0-t tartalmazó int, ahol f invertálható, mivel itt szig. monoton.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \text{ mivel } \lim_{x\to-\infty} 4x^3+3x^4 = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\underbrace{x^3}_{\to -\infty}\underbrace{(4+3x)}_{\to -\infty}}_{\to +\infty} = \underline{\underline{+\infty}}$$

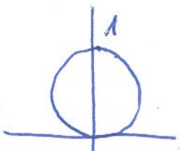
Így f-nek max helye nincs, min helye $x = \underline{\underline{-1}}$-ben van.

Mivel f folyt, $\mathcal{R}_f = [f(-1), +\infty) = [e^{-1}, +\infty) = [\frac{1}{e}, +\infty)$

Invertálni nem tudjuk f-et képlet szinten, de $f^{-1}(e^7)$ számolható:

$$(f^{-1})'(e^7) = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(e^7)}_{1,\text{ mivel } f(1)=e^7})} = \frac{1}{f'(1)} = \underline{\underline{\frac{1}{e^7 \cdot 24}}}$$

(2.)



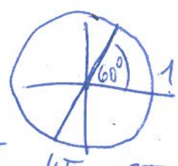
$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2} \qquad x'(\varphi) = \cos(2\varphi)$$

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi = \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \qquad y'(\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin(2\varphi)$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{\sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi)} = \operatorname{tg}(2\varphi) = \sqrt{3}$$

$\Downarrow$

$$\varphi \in (0,\pi) \to 2\varphi \in (0, 2\pi) \implies 2\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ v. } \frac{\pi}{3}+\pi$$



$$\underline{\varphi = \frac{\pi}{6}} \text{ v. } \varphi = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

Így a $\varphi = \frac{\pi}{6}$ és a $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ par-ú pontokban lesz a görbe érintője $\parallel$ $y = 1+\sqrt{3}x$-szel.

$\varphi = \frac{\pi}{6}$: $x_0 = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}/2}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}}}$, $y_0 = \sin^2(\frac{\pi}{6}) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \implies$ érintőegyenes egyenlete:

$$\underline{\underline{y - \frac{1}{4} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

(3.) $y=f(x)$ $a\le x\le b$ görbe ívhossza: $s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Most $f(x)=\ln(\sin x)$, $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$, a1) $s=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx=$

$$=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\,dx,$$ mivel $\sin x>0$ itt.

$$=\int_{tg(\frac{\pi}{6})}^{tg(\frac{\pi}{4})}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{\frac{dx}{dt}}\,dt=\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{1}\frac{1}{t}\,dt=[\ln t]_{1/\sqrt3}^{1}=\underbrace{\ln 1}_{0}-\ln\frac{1}{\sqrt3}$$

$$=\underline{\underline{\ln\sqrt3}}$$

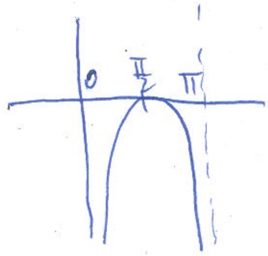
$$\boxed{t=tg\left(\frac{x}{2}\right),\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}}$$

a2) $$s=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}\,dx=\int_{tg(0)}^{tg(\frac{\pi}{4})}\frac{1}{t}\,dt=\int_0^1\frac{1}{t}\,dt=[\ln t]_0^1=\overbrace{\ln 1}^{0}-\overbrace{\lim_{t\to0}\ln t}^{-\infty}$$

0-ban improprius az int.

$$=\underline{\underline{+\infty}}$$

Megj. Ez számolás nélkül is adódik, mivel $\ln(\sin x)$ nem korlátos görbe $[0,\frac{\pi}{2}]$-en.



b) $f(x)=\ln(\sin x)$, $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=ctg\,x$, $f''(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$, $f'''(x)=\frac{2}{\sin^3 x}\cos x$

$f(\frac{\pi}{4})=\ln(\frac{\sqrt2}{2})$, $f'(\frac{\pi}{4})=ctg\frac{\pi}{4}=1$, $f''(\frac{\pi}{4})=\frac{-1}{1/2}=-2$, $f'''(\frac{\pi}{4})=\frac{2\frac{\sqrt2}{2}}{(\frac{\sqrt2}{2})^3}=$

$$=\frac{2}{(\frac{\sqrt2}{2})^2}=\frac{2}{\frac12}=\underline{\underline{4}}$$

Így $$\underline{\underline{T_3(x)=\ln\frac{\sqrt2}{2}+(x-\frac{\pi}{4})\overbrace{-\frac{2}{2}}^{-1}(x-\frac{\pi}{4})^2+\overbrace{\frac{4}{6}}^{+\frac{2}{3}}(x-\frac{\pi}{4})^3}}$$

mis $=T_3(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

4.

$$(1+e^x)\,e^y y' = 1+e^y$$ szét választható DE

0. lépés $y \equiv C \to y' = 0$ $\quad 0 = 1+e^y$, ilyen mo $\nexists$.

1. lépés $1+e^y \neq 0$ $(\forall y)$

$$\int \frac{e^y}{1+e^y}\,dy = \int \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x = s \\ x = \ln s \\ \frac{dx}{ds} = \frac{1}{s} \end{array}}$$

$1+e^y = t$

$e^y = \frac{dt}{dy}$

helyettesítéssel

v. $\int \frac{f'}{f} = \ln f + C$

alapján

most $f = 1+e^y$

$$\ln|1+e^y| = \int \frac{1}{1+s}\cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\frac{dx}{ds}}\,ds$$

$$\frac{1}{(1+s)s} = \frac{a}{s} + \frac{b}{1+s}$$

$$1 = a(1+s) + bs$$

$s \mid 0 = a+b \Rightarrow \underline{\underline{b=-1}}$

$1 \mid \underline{\underline{1 = a}}$

$$\ln|1+e^y| = \int \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\,ds$$

$$\ln|1+e^y| = \ln|s| - \ln|s+1| + C_1$$

$$\ln|1+e^y| = \ln\left|\frac{s}{s+1}\right| + C_1$$

$$|1+e^y| = \left|\frac{s}{s+1}\right| e^{C_1}$$

$$1+e^y = C\,\frac{s}{s+1} = C\,\frac{e^x}{e^x+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$e^y = C\,\frac{e^x}{e^x+1} - 1$$

$$\underline{\underline{y = \ln\left(C\,\frac{e^x}{e^x+1} - 1\right)}}, \; C \in \mathbb{R} \text{ az ált. mo}$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\Big(C\,\underbrace{\frac{e^x}{e^x+1}}_{=\,\frac{1}{1+1/e^x}\,\to\,1} - 1\Big) = \ln(C-1) = 0$$

$$C - 1 = e^0 = 1$$

$$\underline{\underline{C = 2}}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ felt-t kielégítő mo: $\underline{\underline{y = \ln\left(2\,\frac{e^x}{e^x+1} - 1\right)}}$

5.

a) $$\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{n^2-2}{(n-1)(n+1)}\right]^{\binom{n}{3}+\binom{n}{2}}}_{a_n}$$; $$\binom{n}{3}+\binom{n}{2} = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{6}(\underbrace{n-2+3}_{n+1}) = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

$$a_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2-1}\right)^{\frac{n(n^2-1)}{6}}$$

Így $$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{6}} = \left(\left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\right)^{\frac{1}{6}} \to \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}} = L < 1$$

Így a gyökkrit szerint $\sum a_n$ konvergens.

b) • $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$ konv-e? $\frac{n+1}{n^2+1} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ és $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

így szeretnénk belátni, h. eredeti sor is div.
alsó becslés kellene.

$$\sum \frac{n+1}{n^2+1} \geq \sum \frac{n}{2n^2} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$$ így $\underline{\underline{x=1}}$-re a sor $\underline{\underline{\text{div}}}$.

• $\sum \frac{n+1}{n^2+1}(-1)^n$ konv-e? Azt reméljük, h. Leibniz-sor, és így konv.

• $\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \to 0$ ✓

• vált előjelű a sor ✓

• $\frac{n+1}{n^2+1}$ mon fogy-e?

$$\frac{n+1}{n^2+1} \overset{?}{>} \frac{n+2}{(n+1)^2+1} = \frac{n+2}{n^2+2n+2}$$

$$\cancel{n^3}+\cancel{2n^2}+2n+n^2+2n+\cancel{2} > \cancel{n^3}+n+\cancel{2n^2}+\cancel{2}$$

$$n^2+4n > n$$

$$n^2 > -3n$$ ✓

Így a sor konvergens, de nem abs. konv, mivel $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$ div.
$\underline{\underline{x=-1}}$-re

c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,dx$

teljes négyzetté alakítva

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = [\arcsin u]_{-1}^{0} = \overbrace{\arcsin 0}^{0} - \overbrace{\arcsin(-1)}^{-\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$u = 2x-1$

$du = 2\,dx$

Így az int. $\underline{\underline{\text{konv.}}}$

Megj. Ha nem sikerül kiszámolni, becsülhetjük.

$x-x^2 = (1-x)x = 0 \iff x=0 \vee x=1$, így az int $\underline{\underline{x=0\text{-ban}}}$ $\underline{\underline{\text{improprius}}}$.

Itt ($x\to 0+$ esetén) $x \gg x^2$, ezért $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Így remélhetjük, h. az int hasonlóan viselkedik, mint $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$

($p=\frac{1}{2}$ miatt)

Így $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} \le C\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ felső becslés kellene 0 környékén ($x>0$-ra)

$\sqrt{x} \le C\sqrt{x-x^2}$

$x \le C^2(x-x^2)$

$1 \le C^2(1-x)$ Most $0\le x\le \frac{1}{2}$, így $1-x \ge \frac{1}{2}$

így $C=\sqrt{2}$ megfelelő.

$\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx \le \sqrt{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2}\,\left[2\sqrt{x}\right]_0^{1/2} < \infty$ $\Rightarrow$ eredeti int is $\underline{\underline{\text{konv.}}}$