Beadandó házi feladatok

1. sorozat (beadási határidő 2016.10.12. 8:15 T61/62)

1. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n} < 4^{n-1}$, ha $n \geq 5$ egész! $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} =?$
2. n egyenest a síkon általános helyzetűnek hívunk, ha közülük semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át közös ponton. Legyen $a(n)$ az a szám, ahány részre osztja a síkot n általános helyzetű egyenes! Bizonyítsuk be, hogy alkalmas A, B, C valós számokra $a(n) = An^2 + Bn + C$. (Bátrabbak szorgalmi feladatként elgondolkodhatnak azon is, hogy n általános helyzetű sík hány részre osztja a teret.)
3. Határozzuk meg a következő határértékeket:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{8^{n+5}+\cos^2(n!)}{7n^{2009}+2^{3n}} + \frac{\sin^2((\sqrt{2})^n)\cdot(\sqrt{11})^n+n^{10000}}{n!+\binom{n}{4}} \right)$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((n^3+7n-6)^{1/3} - (n^3+2n+3)^{1/3} \right)$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3\sqrt{n}+4}{4n^2-2n+1} \right)^{3/n}$,
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$. (Ötlet: vizsgáljuk az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sorozat viselkedését.)
4. Határozzuk meg az $a > 0$, $b > 0$ (pozitív valós) paraméterek minden lehetséges értéke mellett a következő határértékeket:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{2n-1} - an \right)$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n-a)(n+b)} - n)$.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - a(n+1))$.
5. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt{\cos\frac{2}{n}} - \sqrt{\cos\frac{1}{n}} \right) =?$ (Emlékeztető: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.)
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2^n+n^3} \cdot \left(\frac{n^2-1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)} \right)^{\binom{n}{2}} \right) =?$
6. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = c$, ahol $c > 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Az állítás megfordítása *nem* igaz: mutassunk példát olyan sorozatra, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.
   (b) Mutassunk példákat olyan a_n és b_n sorozatokra, hogy (i) $a_n - b_n \to 0$, de a_n/b_n nem tart 1-hez, illetve (ii) $a_n/b_n \to 1$, de $a_n - b_n$ nem tart 0-hoz.
7. Az $\alpha > 0$, $\beta > 0$ paraméterek minden lehetséges értéke mellett határozzuk meg az alábbi határértékeket:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}}{2^n} \right)^{2^{n+3}-5}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\sin(\frac{\alpha}{n})\right)^{1/(1-\cos(\frac{\beta}{n}))}$. (*Útmutatás:* Használjuk a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ határértékeket.)

(*Megj.* Előadáson szerepeltek a köv. állítások: 1.Áll.: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} = e$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{a_n})^{a_n} = 1/e$. 2.Áll.: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ vagy $-\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{b_n} = e^c$.)

8. Igazoljuk, hogy az $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ sorozat monoton.

9. Legyen $a > 1$ rögzített. Igazoljuk, hogy a

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2b_n + \frac{a}{b_n^2}\right); \qquad b_1 = 1$$

rekurzív formulával definiált sorozat konvergens, és határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ értékét. (*Útmutatás:* a korlátosság bizonyításához használjuk a számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget.)

10. Mutassuk meg, hogy az $a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ rekurzív sorozat konvergens, és keressük meg a határértékét. (Plusz pontért: Legyen $a_1 = \alpha \neq 4$ tetszőleges. Hogyan viselkedik a sorozat?)

11. Határozzuk meg az alábbi függvények határértékeit a megfelelő helyeken.

    (a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$,

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}$,

    (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

12. Tekintsük a következő valós változós, valós értékű függvényeket. Határozzuk meg a (lehetséges legbővebb) értelmezési tartományt, az értékkészletet, és vázoljuk a grafikont. Invertálhatóak-e a függvények? Ha igen, határozzuk meg az inverzüket. Ha nem, lehetséges-e a függvényt megszorítani egy korlátos intervallumra úgy, hogy a megszorítás már invertálható legyen? Ha lehetséges, adjuk meg a megszorított függvény inverzét!

    (a) $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$,

    (b) $f(x) = 3\,\mathrm{tg}\,2x - 1$,

    (c) $f(x) = 2\{\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\} + 1$. Itt $\{a\}$ az $a \in \mathbb{R}$ szám törtrészét jelöli.

13. Határozzuk meg $\liminf a_n$-t és $\limsup a_n$-t, ha $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+2^{3n}}{\sqrt{n}\cdot 3^{2n}}\right)^{1/n}$.

14. Keressünk olyan a_n számsorozatot, amelyre a_n torlódási pontjainak halmaza $\mathbb{N}$. Mennyi $\liminf a_n$ és $\limsup a_n$?

15. Osztályozzuk a következő függvény szakadási helyeit az A, B, C valós paraméterek minden értékére:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{ha } x < -1, \\ A & \text{ha } x = -1, \\ B \operatorname{sgn} x & \text{ha } -1 < x < \pi, \\ C & \text{ha } x = \pi, \\ \frac{\sin x}{x-\pi} & \text{ha } x > \pi. \end{cases}$$

16. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} (\sin(\sqrt{x}))^2 & \text{ha } x > 0, \\ A \operatorname{sh} x + B & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Hogyan válasszuk meg az A és a B paraméterek értékét ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható legyen? Írjuk fel az $f'(x)$ deriváltfüggvényt!

17. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható (számoljuk ki a deriváltját), de a deriváltfüggvénye nem folytonos a 0-ban.

18. Adjuk $f(x) = \sqrt[3]{22 + 4x^2 + x^4}$ értelmezési tartományát, értékkészletét! Szorítsuk meg a (lehetséges legbővebb) $x_0 = 2$ pontot tartalmazó intervallumra úgy, hogy invertálható legyen. Mennyi az *inverz függvény* deriváltja a 3 pontban?

19. $f(x) = \arcsin(\sqrt{\frac{1}{2} + 4x^4})$ Adjuk meg az értelmezési tartományát! Igazoljuk, hogy a $[0, \frac{1}{\sqrt[4]{8}})$ intervallumra megszorítva a függvény invertálható! Mennyi lesz az inverzének a deriváltja az $y_0 = \frac{\pi}{3}$ pontban?

20. Írjuk fel $f(x) = (\ln(3x))^{\operatorname{tg}(\pi x)} + \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3}}$ érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.