Beadandó házi feladatok

2. sorozat (beadási határidő 2016.11.08. kedd 8:15)

Tizennégy feladat beadása kötelező, ennyi feladat helyes megoldása számít 100%-os teljesítménynek. Több feladat is beadható plusz pontokért.

1. Előadáson szerepeltek az $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ és a $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ függvények: segítségükkel definiáljunk további két hiperbolikus függvényt: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ és $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

   (a) Adjuk meg $\operatorname{th} x$ és $\operatorname{cth} x$ (lehetséges legbővebb) értelmezési tartományát, értékkészletét; vázoljuk grafikonjaikat, vizsgáljuk a határértékeiket $\pm\infty$-ben és az értelmezési tartomány egyéb határpontjaiban.

   (b) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{th} x$ és $\operatorname{cth} x$ invertálhatóak, válaszoljunk az (a) feladat kérdéseire az inverzeik, $\operatorname{arth} x$ és $\operatorname{arcth} x$ esetében is.

   (c) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ és $\operatorname{arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

   (*Útmutatás*: fejezzük ki $\operatorname{th} x$-t és $\operatorname{cth} x$-t e^{2x} segítségével.)

2. Emlékeztető az előadásról: ha I intervallum, akkor egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz választható egy $\delta > 0$ szám, hogy tetszőleges $x_1 \in I$ és $x_2 \in I$ esetén, ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Szerepelt továbbá a Heine tétel, mely szerint amennyiben f folytonos és az értelmezési tartomány $I = [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, akkor f egyenletesen folytonos.

   (a) Legyen $f(x) = x^p$, ahol $p > 0$ és $I = [0, 3]$. Ekkor f a Heine tétel értelmében egyenletesen folytonos. Hogyan kell ε-hoz δ-t választani?

   (b) Legyen $f(x) = x^p$, ahol $p > 0$ és $I = [0, +\infty)$. Milyen p-re lesz ekkor f egyenletesen folytonos?

3. (a) Határozzuk meg az $\operatorname{arsh} x$ és $\operatorname{arch} x$ függvények deriváltjait felhasználva az inverz függvény deriválási szabályát és a $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ összefüggést.

   (b) Igazoljuk, hogy $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $\forall x \geq 1$ esetén. Ez alapján is határozzuk meg az $\operatorname{arsh} x$ és $\operatorname{arch} x$ függvények deriváltjait.

   (c) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x + \sin x$ függvény a teljes $\mathbb{R}$-n szigorúan monoton nő, és így invertálható. Mi lesz az inverzének a deriváltja az $1 + \frac{\pi}{2}$ pontban?

4. (a) Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ függvény azon érintőegyenes(ei)nek egyenlete(i)t, amely(ek) párhuzamos(ak) az $y = -\frac{1}{2}x + 5$ egyenessel.

   (b) Tekintsük az $\ln(e^x + y^2) + \operatorname{sh}(x + \ln(y)) = \ln(2)$ implicit alakban adott görbét! Mutassuk meg, hogy az $(x_0, y_0) = (0, 1)$ pont illeszkedik a görbére! Mi ebben a pontban a görbét érintő egyenes egyenlete?

5. (a) Tekintsük az $x^{2/5} + y^{2/5} = 1;\ x \geq 0, y \geq 0$ implicit alakban megadott görbét. Milyen pont(ok)ban lesz az érintője párhuzamos az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenessel?

   (b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a > 0$, $b > 0$ konstansok esetén az $x^2 - y^2 = a$ és $xy = b$ implicit alakban megadott görbék merőlegesen metszik egymást (azaz a metszéspontban az érintőegyenesük egymásra merőleges).

6. Előadáson szerepelt az $x(t) = R(t - \sin t)$; $y(t) = R(1 - \cos t)$ $(t \in \mathbb{R})$ paraméteres alakban megadott görbe, a *ciklois*, amely egy egyenes mentén csúszásmentesen gördülő R sugarú (kör alakú) kerék egy adott pontjának mozgását írja le. Mutassuk meg, hogy minden t időpontban a keréknek az egyenessel éppen érintkező pontja rajta fekszik a ciklois t időponthoz tartozó normális egyenesén (az érintőegyenesre merőleges egyenesen).

7. *Tekintsük az $A = (-1, 0)$ és a $B = (1, 0)$ koordinátájú pontokat, és jelölje a sík egy tetszőleges P pontjára az AP, illetve BP szakaszok hosszát d_1, illetve d_2. Azok a P pontok, melyekre $d_1 \cdot d_2 = 1$, egy görbén fekszenek; ezt a görbét *lemniszkátá*nak hívják. Mutassuk meg, hogy polárkoordinátákban a lemniszkáta egyenlete $r = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$. (*Útmutatás*: Egy lehetőség, hogy O-val jelölve az origót, felírjuk a koszinusz tételt a AOP és BOP háromszögekre. De lehet Descartes koordinátákban is számolni, és a végén áttérni polárra.) Milyen φ értékekre értelmes ez a képlet, és milyen φ-re lesz a lemniszkáta érintője vízszintes? (Pontozáson kívül: érdemes vázolni a görbét, ehhez, akinek van kedve, használhat valamilyen matematikai szoftvert is.)

8. (a) Legyen $f(x) = e^{-2x} + \ln(1 + 3x) - \cos(5x)$. Számoljuk ki $f^{(n)}(0)$-t minden $n \in \mathbb{N}$-re!
   (b) Legyen $f(x) = x(\sqrt{2}\,x + 1)(\sqrt[3]{2}\,x + 4)(\sqrt[4]{2}\,x + 9) \cdots (\sqrt[100]{2}\,x + 99^2)$, és $g = f \circ f \circ f$. Mennyi $g'(0)$ értéke?

9. Tekintsük a $Q(x) = x^5 - 5x + 3$ polinomot. Mutassuk meg, hogy $Q(x)$-nek pontosan három valós gyöke van. (*Útmutatás*: Bolzano és Rolle tételeit lehet jól használni.)

10. * Legyen $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 6$. Mutassuk meg, hogy $f(x)$ korlátos és egyenletesen folytonos. (*Útmutatás*: Weierstrass és Heine tételét érdemes felhasználni, persze alkalmas intervallumokra.)

11. *Legyen $[a, b]$ korlátos zárt intervallum, és $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvény (tehát $a \leq f(x) \leq b$ minden $x \in [a, b]$ esetén). Bizonyítsuk be, hogy ekkor van (legalább egy) olyan $c \in [a, b]$, hogy $f(c) = c$, vagyis f-nek van legalább egy fixpontja. (*Útmutatás*: Alkalmazzuk Bolzano tételét a $g(x) = f(x) - x$ függvényre.) Mutassunk példát rá, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor lehet, hogy egy fixpontja sincs.

12. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = ?$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x} = ?$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = ?$

13. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot (értelmezési tartomány, értékkészlet, limeszek, menettulajdonságok, szélsőértékek, alaki tulajdonságok, aszimptoták) az alábbi függvényekre. Állapítsuk meg, van-e (és ha igen, mennyi) véges abszolút maximumuk, illetve minimumuk.
    (a) $f(x) = \frac{6x}{1+x^3}$ (b) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ (c) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

14. Legyen
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & , \text{ha } x \neq 0, \\ A & , \text{ha } x = 0. \end{cases}$$
(a) Az A paraméter milyen értékére lesz $f(x)$ mindenhol folytonos? (b) Ezen érték esetén $f(x)$ differenciálható-e a 0-ban? (c) Ábrázoljuk $f(x)$-et.

15. Adott két egymást nem metsző gömb, $(0 <) r < R$ sugarakkal, középpontjuk távolsága legyen $a (> r + R)$. A középpontjukat összekötő szakaszon szeretnénk elhelyezni egy pontszerű fényforrást. Hova helyezzük, ha azt szeretnénk elérni, hogy a lehető legnagyobb felületet világítsuk meg a két gömbön együttesen?

16. *Előadáson szerepelt, hogy ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor $\forall a, b \in I$ és $\forall 0 \leq t \leq 1$ esetén: $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ (a szelő a függvénygörbe fölött halad). (*Megjegyzés*: Ezt a tulajdonságot a konvexitás definíciójának is szokták tekinteni, így beszélhetünk abban az esetben is konvexitásról, ha $f(x)$ az I bizonyos pontjaiban nem differenciálható. Konvex pl. az $f(x) = |x|$ függvény is, $I = \mathbb{R}$.)

    (a) Igazoljuk a *Jensen-egyenlőtlenség*et: ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, $x_1, x_2, \ldots x_n \in I$ pontokra és olyan $0 \leq t_i \leq 1$ számokra ($i = 1, \ldots, n$), melyek teljesítik a $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ feltételt, igaz, hogy:

    $$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).$$

    (b) Lássuk be a számtani és k-ad rendű közepek közti egyenlőtlenséget: ha $a_1, a_2, \ldots a_n$ tetszőleges pozitív számok, és $k > 1$ rögzített egész szám, akkor

    $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots a_n^k}{n}}.$$

    (*Útmutatás*: Előző részfeladat, és alkalmas $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvények konvexitása.)

17. *Ha $f(x)$ konvex függvény, a Legendre-transzformáltját a

    $$g(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{p \cdot x - f(x)\}$$

    képlet definiálja.

    (a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{mx^2}{2}$ függvény Legendre-transzformáltja $g(p) = \frac{p^2}{2m}$ (ahol $m > 0$ valós paraméter)!

    (b) Igazoljuk, hogy az $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$) és $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ ($\beta > 1$) függvények pontosan akkor egymás Legendre-transzformáltjai, ha $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$! (Persze itt általában f és g is csak $x > 0$ – illetve $p > 0$ – esetén van értelmezve.)

    (c) Az előző részfeladat és a Legendre-transzformált definíciója alapján igazoljuk, hogy minden $x > 0$, $p > 0$ értékek esetén $p \cdot x \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$, ahol $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ és $\alpha > 1$, $\beta > 1$ (ez a Hölder-egyenlőtlenség legegyszerűbb esete).

18. Adjuk meg a következő fv-ek $x_0 = 0$ körüli n-edik Taylor polinomját:

    $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$

19. Becsüljük meg az alábbi mennyiségeket egy megfelelő Taylor-polinom segítségével. Ügyeljünk a maradéktag korrekt kezelésére.

    (a) $\sqrt[3]{28}$ értékét 10^{-3} pontossággal;

    (b) $\cos(47^o)$ értékét 10^{-4} pontossággal;

    (c) $\operatorname{sh}(0,2)$ értékét 10^{-5} pontossággal.

20. Az $y = \ln x$ ($x > 0$) görbe melyik pontjában lesz maximális illetve minimális a görbület?

21. Számoljuk ki az alábbi Riemann integrálokat, mint alkalmas, minden határon túl finomodó felosztássorozatokhoz tartozó téglalapösszegek ($\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$; valamilyen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ választással) határértékét:

   (a) $\int_0^1 (x^2 + x - 2)\, dx = ?$

   (b) $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx =?$ (*Útmutatás:* Először lássuk be, hogy $\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin(n\alpha+\alpha/2)}{2\sin\alpha/2}$. Ehhez felhasználhatjuk a $\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$ azonosságot.

22. *Legyen $0 < a \le b$ rögzített: ezeknek a számoknak az s-ed rendű közepén a $\Delta_s(a,b) = \left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{1/s}$ mennyiséget értjük – itt $s \neq 0$ valós paraméter.

   (a) Mutassuk meg, hogy $\lim_{s\to-\infty} \Delta_s(a,b) = a$; $\lim_{s\to+\infty} \Delta_s(a,b) = b$, valamint, hogy $\lim_{s\to 0} \Delta_s(a,b) = \sqrt{ab}$ – ezért is hívják a mértani közepet nulladrendű középnek. (*Útmutatás*: vizsgáljuk a $g(s) = \ln(\Delta_s(a,b))$ függvényt, és használjunk L'Hospital szabályt.)

   (b) Mutassuk meg, hogy $\Delta_s(a,b) \le \Delta_t(a,b)$, ha $s < t$, és egyenlőség csak $a = b$ esetén fordul elő. (*Útmutatás*: mutassuk meg, hogy az előző részfeladatban definiált $g(s)$ függvény szig. mon. nő. Ehhez érdemes g-t deriválni, majd konvexitás szempontjából megvizsgálni a $\varphi(x) = x\ln x$ függvényt, és használni azt az előadáson bizonyított tényt, hogy ha $\varphi(x)$ egy szigorúan konvex függvény, akkor minden $x_1 < x_2$ esetén $\varphi(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}$.)

23. *

   (a) Legyen $f \in C^1[0,1]$ (azaz $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható). Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $M > 0$ szám, hogy

$$\Delta_n := \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \le \frac{M}{n}.$$

   (b) Jelöljük az $[a,b]$ itervallum $\tau = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ felosztásainak összességét $\mathcal{T}$-vel. Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény τ felosztáshoz tartozó megváltozása alatt a $\mathrm{Var}(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ mennyiséget értjük, és azt mondjuk, hogy f *korlátos változású*, ha teljes megváltozása, a $\mathrm{Var}(f) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathrm{Var}(f,\tau)$ mennyiség véges. Legyen $g \in C^1[a,b]$, mutassuk meg, hogy ekkor g korlátos változású és $\mathrm{Var}(g) = \int_a^b |g'(x)|\, dx$.

24. Keressük meg az alábbi függvények határozatlan integrálját (primitív függvényeiket):

$$\frac{x^3-1}{2x+3}; \qquad \sin(2x)\cdot\cos(7x); \qquad \mathrm{sh}\,(-3x)\cdot\mathrm{ch}\,(5x).$$