Beadandó házi feladatok

3. sorozat (beadási határidő 2016.11.23. 8:15 T61/62)

Nyolc feladat beadása kötelező.

1.

(a) $\displaystyle\int \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$ (b) $\displaystyle\int \frac{5x^2+19x+15}{x^3+6x^2+12x+8}\, dx = ?$ (c) $\displaystyle\int \frac{-7-55x+19x^2+6x^3}{x^2+3x-10}\, dx = ?$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg} x + \sin x}\, dx = ?$

2.

(a) $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = ?$ (b) $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx = ?$ (c) $\displaystyle\int_2^{5/2} \sqrt{-7+8x-2x^2}\, dx = ?$ (d) $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x+\frac{1}{2}}{\operatorname{ch} x}\, dx = ?$

3. *

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re vannak olyan a_n és b_n egész számok, amelyekre teljesül, hogy $\int_0^1 x^n e^x\, dx = a_n \cdot e + b_n$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_0^1 x^n e^x\, dx\right) = 0$.

(c) Bizonyítsuk be az előző két részfeladat alapján, hogy e irracionális.

4. * Tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 1$ valós paraméterekre vezessük be a

$$\mathrm{B}(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$$

jelölést. (Később látni fogjuk, hogy ez tetszőleges $a > 0$ és $b > 0$ esetén is értelmezhető).

(a) Mutassuk meg, hogy ez a kifejezés szimmetrikus: $\mathrm{B}(a,b) = \mathrm{B}(b,a)$.

(b) Számoljuk ki $\mathrm{B}(a,b)$ értékét abban a speciális esetben, amikor a két paraméter közül az egyik egy $n \geq 1$ *egész* szám. (*Útmutatás*: teljes indukció, és az indukciós lépéshez parciális integrálás.)

(c) Legyen most mindkét paraméter $m \geq 1$ illetve $n \geq 1$ egész szám. Mi a kapcsolat $\mathrm{B}(m,n)$ és a binomiális együtthatók között?

5.

(a) $\displaystyle F(x) = \int_{\sqrt{1+x^2}}^{e^{x^2}} \left(\ln(\operatorname{arsh}(\sqrt{t})) + \sqrt[3]{1+\cos^2(2t)} + 6\right) dt, \quad (x > 1). \qquad F'(x) = ?$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{t^{5/3}}{\sqrt[3]{1+8t^2}} dt}{\ln(1+\sqrt{e^{x^2}})} = ?$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{\int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{t^2}\, dt}{\int_0^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch}(t^3) dt} = ?$

6. Számoljuk ki a megadott két görbe által határolt korlátos tartomány területét:

   (a) $y = 2x^2 + 9x + 3$ illetve $y = 3x^2 + 2x + 13$; (b) $y = e^{\sqrt[3]{x}}$ illetve $y = e^x$.

7. *

   (a) Tekintsük a sík egy olyan D korlátos tartományát, melyet egy $\gamma(t) = (x(t), y(t))$; $a \leq t \leq b$ paraméteres alakban megadott, (szakaszonként) folytonosan differenciálható, zárt görbe – azaz $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$ – határol. Tegyük fel továbbá, hogy D belsejében van (legalább) egy P pont, melyre teljesül, hogy a P-ből kiinduló félegyenesek mindegyike egy és csak egy pontban metszi a $\gamma(t)$ görbét. Mutassuk meg, hogy ekkor a D tartomány területe kiszámolható a

   $$t(D) = \left| \frac{1}{2} \int\limits_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\, dt \right|$$

   képlettel. (*Útmutatás:* Tegyük fel először, hogy P az origó, és bontsuk fel D-t kis háromszögekre; ezek területét kiszámolhatjuk, mint két szomszédos oldalukat kijelölő vektor vektoriális szorzatának abszolút értékét. Ezek után mutassuk meg, hogy az origó eltolása nem változtatja meg az integrál értékét.)

   (b) Paraméterezzük az $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ ellipszist, majd számoljuk ki a fenti képlettel belsejének a területét.

   (c) Előadáson szerepel(ni fog) az $r(\varphi)$, $(0 \leq)\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2(\leq 2\pi)$ polárkoordinátás görbe által meghatározott szektorszerű idom fogalma és területképlete ($t = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi$). Vezessük le ezt a formulát az (a) feladat képletéből.

8. Határozzuk meg az alábbi görbeszakaszok ívhosszát:

   (a) $f(x) = e^x$, $\ln 2 \leq x \leq \ln 3$,

   (b) $f(x) = \arcsin(e^x)$, $\ln(\sqrt{2}/2) \leq x \leq \ln(\sqrt{3}/2)$.

9. Vezessük le az ívhossz általános képletéből, hogy egy $r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ polárkoordinátás görbe ívhosszát az $\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$ képlettel lehet meghatározni, ahol $'$ a φ szerinti deriválást jelöli. Ezek alapján számoljuk ki az $r(\varphi) = 1 - \cos\varphi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ görbe ívhosszát.

10. (a) Legyen $0 \leq a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy ha az f grafikonja, valamint az $x = a$, $x = b$ egyenesek és az x tengely által határolt korlátos tartományt az y tengely körül megforgatjuk, akkor a keletkező forgástest térfogatát a $V = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$ képlettel lehet számolni; az f grafikonjának y tengely körüli megforgatásával kapott felület felszínét pedig az $A = 2\pi \int\limits_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ képlettel. Számoljuk ki:

    (b) Az $f(x) = 2x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$ görbeszakasz y tengely körüli megforgatásával kapott felület felszínét;

    (c) Az $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ görbe és az x tengely közti korlátos tartomány y tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát.

11. (a) Bizonyítsuk be a *Pappos-Guldin szabályt:* (amit már Pappos 4.sz-i görög matematikus is ismert!)
(1) Ha egy T korlátos síkbeli tartományt megforgatunk egy vele egysíkú és őt nem metsző tengely körül, akkor a keletkező forgástest térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a tartomány területét megszorozzuk a tartomány súlypontja által leírt kör kerületével.

(2) Ha egy Γ síkbeli egyszerű ívet megforgatunk egy vele egysíkú és őt nem metsző tengely körül, akkor a keletkező forgástest felszínét megkaphatjuk úgy, hogy az ív hosszát megszorozzuk az ív súlypontja által leírt kör kerületével.

(*Útmutatás:* (1) esetén az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tengelyhez képesti ún. normáltartományról van szó, vagyis adottak $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$; $f(x) \leq g(x)$ függvények, hogy $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b;\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$, tengelyként választhatjuk az x tengelyt vagy az y tengelyt.)

(b) Határozzuk meg *integrálással és integrálás nélkül is* egy félkör alakú, homogén tömegeloszlású lemez súlypontját.

(c) Ellenőrizzük az (1) szabályt úgy, hogy kiszámoljuk a szereplő mennyiségeket akkor, ha megforgatjuk az $y = \sin x$ görbe $0 \leq x \leq \pi/2$ szakasza, az $x = \pi/2$ egyenes és az x tengely által körülhatárolt korlátos tartományt az y tengely (!) körül.

(d) Határozzuk meg annak a tórusznak a felszínét és térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy egy $r > 0$ sugarú kört megforgatunk egy vele egysíkú, a kör középpontjától $R > r$ távolságra levő tengely körül.

12. Keressük meg az $\dot{x} = \sqrt{4x - x^2}$ differenciálegyenletnek az $x(0) = 1$, $x(0) = 3$, valamint az $x(0) = 4$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldásait. Mi történik, ha $x(0) = 0$? Meg tudjuk-e állapítani, honnan indultunk ($x(0) =?$), ha $x(20) = 4$?

13. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

(a) $y' \cos x - y \sin x = 1$;

(b) $\ddot{x} = \frac{1}{x^3}$. (*Útmutatás:* Ahogy az előadáson szerepelt, ennél a hiányos másodrendű egyenletnél először érdemes a $v(x)$ függvényre átírni a differenciálegyenletet, azt megoldani, majd ez alapján meghatározni $x(t)$-t. Az egyenlet egy (egységnyi tömegű) pontrészecske mozgását írja le egydimenzióban, egy konzervatív erőtérben. Gondoljuk meg, mi a potenciál, és hol jelentkezik a megoldásban a teljes energia.)