

Beadandó házi feladatok

3. sorozat (beadási határidő 2019. 11. 22. péntek 08:15 MGFEA, 6 feladat beadása kötelező).

1. Deriváljuk a következő függvényeket: $\frac{1}{(x^2+1)^4}$, $e^{\sqrt{x^3+\cos^2 x^4}}$, $\frac{(x^3-2x+1)^5}{\log_3 x}$, $\sqrt{x}$, $\log_x 3$, $2^{x \cos x}$, $\ln \ln^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $e^{2x} \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x$,
2. (a) Írjuk fel $f(x) = (\arctg(2x))^{\cos(\pi x)} + \frac{\ln(2x)}{\sqrt[3]{\arcsin(2x^2)}} + \log_x(x^2)$ érintőegyenésének egyenletét az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontban!
- (b) Pistike ceruzájának hegye a $(4, 0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokban szögben kell elindítania a ceruzáját?
- (c) Határozzuk meg $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonjának azon pontjait, ahol a görbéhez húzott érintő párhuzamos a $2x + 3$ egyenessel. Egy ilyen pontban írjuk is fel az érintőegyenest!

3. (a) Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} + \operatorname{sh} x & \text{ha } x < 0, \\ 1 + \ln(x+1) & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

függvény mindenhol differenciálható, és adjuk meg a deriváltfüggvényt!

- (b) $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)^2}$ hol differenciálható? Ott $f'(x) = ?$

4. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 2x}{x} & \text{ha } x < 0, \\ A \arccos x - \arctg \sqrt{3} & \text{ha } x = 0, \\ B \operatorname{arsh} x + C & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Hogyan válasszuk meg az A , B , C paraméterek értékét, hogy az $f(x)$ függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható legyen?

5. Tekintsük az $\ln(e^x + y^2) + \operatorname{sh}(x + \ln(y)) = \ln(2)$ implicit alakban adott görbét! Mutassuk meg, hogy az $(x_0, y_0) = (0, 1)$ pont illeszkedik a görbére! Mi ebben a pontban a görbét érintő egyenes egyenlete?
6. Tekintsük az $x^y = y^x$ implicit alakban megadott görbét. Mutassuk meg, hogy az $(x_0, y_0) = (2, 4)$ pont rajta van ezen a görbén. Mi ebben a pontban a görbét érintő egyenes egyenlete? Adjuk meg a görbe vízszintes és függőleges érintőinek egyenletét!
7. Számítsuk ki az $x^2 - xy + y^2 = 3$ egyenlet által meghatározott implicit függvények, $y(x)$ és $x(y)$, első és második deriváltjait. (Az egyenletet deriváljuk kétszer.)
8. (a) Legyen $f(x) = e^{-2x} + \ln((1+3x)^2) - \cos(-4x)$. Számoljuk ki $f^{(n)}(0)$ -t minden $n \in \mathbb{N}$ -re!
- (b) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x + \cos x$ függvény a teljes $\mathbb{R}$ -en szigorúan monoton nő, és így invertálható. Mi lesz az inverzének a deriváltja a $\frac{\pi}{2}$ pontban?
9. (a) Az $(1, 2)$ pont kellően kicsi környezetében konvex vagy konkáv az $x^2 - xy + y^2 = 3$ egyenlet által meghatározott implicit függvény? (Az egyenletet deriváljuk kétszer, és így határozzuk meg $y''(1)$ értékét.)

- (b) Adjuk meg az $x = t^3 + t, y = t^3 - t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe $t_0 = 1$ paraméterhez tartozó pontjában az érintőegyenes egyenletét (Descartes koordinátákban)! Mely pont(ok)ban párhuzamos az érintőegyenes a $22x - 26y = 5$ egyenessel?
- (c) (*) (+2p) Adjuk meg az $x = t^3 + t, y = t^3 - t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe $t_0 = 1$ paraméterhez tartozó pontjában a görbe által meghatározott függvény második deriváltját és a görbe görbületét. E pont közelében konvex vagy konkáv a görbe által meghatározott függvény?
10. (a) Adjuk meg az $r = 2 \cos \varphi$ polárkoordinátásan adott görbe egyenletét Descartes-koordinátákban, és állapítsuk meg, hogy milyen görbéről van szó.
- (b) Keressük meg az $r = e^\varphi$ polárkoordinátásan adott görbe vízszintes és függőleges érintőjű helyeit, és egy-egy ilyen pontban írjuk is fel az érintőegyenes egyenletét (Descartes koordinátákban)! Adjuk meg a $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ paraméterhez tartozó pontban is az érintőegyenes egyenletét!
11. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = ?$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = ?$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\arctg x} = ?$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} = ?$
- Használjuk a l'Hospital szabályt, ahol lehet!
12. (8p) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot (értelmezési tartomány, értékkészlet, limeszek, menettulajdonságok, szélsőértékek, alaki tulajdonságok, aszimptoták) az alábbi függvényekre. Állapítsuk meg, van-e (és ha igen, mennyi) véges abszolút maximumuk, illetve minimumuk.
- (a) $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$, (b) $f(x) = x - 2\arctg\left(\frac{x}{x+2}\right)$, (c) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$
13. Határozzuk meg azt a legnagyobb területű derékszögű háromszöget, amelynél az átfogó és az egyik befogó hosszának összege 5 cm!
14. Modellezze egy tó partvonalát az x tengely. A felső félsíkban víz van, ebben 3 km/h maximális sebességgel tudunk úszni. Az alsó félsík szárazföld, ezen 10 km/h maximális sebességgel tudunk futni. Hogyan tudunk a leggyorsabban eljutni a $(0, a)$ koordinátájú pontból a $(c, -b)$ koordinátájú pontba ($a, b, c > 0$ paraméterek)? (Milyen fizikai törvényt vezettünk le?)
15. Határozzuk meg az $R > 0$ sugarú gömbbe írható maximális térfogatú kúp térfogatát!
16. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény minden $x \in \mathbb{R}$ esetén differenciálható (számoljuk ki a deriváltját), de a deriváltfüggvénye nem folytonos a 0-ban.

17. (a) Tekintsük a $Q(x) = x^5 - 10x^3 + 50x + 20$ polinomot. Mutassuk meg, hogy $Q(x)$ -nek pontosan egy valós gyöke van.

- (b) Legyen $P_n(x)$ egy olyan n -ed fokú polinom, amelynek n különböző valós gyöke van. Mutassuk meg, hogy ilyenkor a $P_n^{(k)}(x)$; $k = 1, \dots, n-1$ deriváltjainak, amelyek szintén polinomok (mi is a fokszámuk?), szintén minden gyöke valós és különböző.

(*Útmutatás:* Bolzano és Rolle tételeit lehet jól használni.)

18. Előadáson szerepelt az $x(t) = R(t - \sin t)$; $y(t) = R(1 - \cos t)$ ($t \in \mathbb{R}$) paraméteres alakban megadott görbe, a *ciklois*, amely egy egyenes mentén csúszásmentesen gördülő R sugarú (kör alakú) kerék egy adott pontjának mozgását írja le. Mutassuk meg, hogy minden t időpontban a keréknek az egyenessel éppen érintkező pontja rajta fekszik a ciklois t időponthoz tartozó normális egyenesén (az érintőegyenesre merőleges egyenesen).
19. (*) Tekintsük az $A = (-1, 0)$ és a $B = (1, 0)$ koordinátájú pontokat, és jelölje a sík egy tetszőleges P pontjára az AP , illetve BP szakaszok hosszát d_1 , illetve d_2 . Azok a P pontok, melyekre $d_1 \cdot d_2 = 1$, egy görbén fekszenek; ezt a görbét *lemniskátának* hívják. Mutassuk meg, hogy polárkoordinátákban a lemniskáta egyenlete $r = \sqrt{2 \cdot \cos(2\varphi)}$. (*Útmutatás:* Egy lehetőség, hogy O -val jelölve az origót, felírjuk a koszinusz tételt a AOP és BOP háromszögekre. De lehet Descartes koordinátákban is számolni, és a végén áttérni polárra.) Milyen φ értékekre értelmes ez a képlet, és milyen φ -re lesz a lemniskáta érintője vízszintes? (Pontozáson kívül: érdemes vázolni a görbét, ehhez, akinek van kedve, használhat valamilyen matematikai szoftvert is.)
20. Az $(\frac{1}{2}, 0)$ középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör területén csúszásmentes végiggörgetünk egy $\frac{1}{2}$ sugarú kört. Fessük pirosra ez utóbbi körnek azt a pontját, amely gördülés közben a $(0, 0)$ pontban érinti az első kört. Adjuk meg e piros pont pályájának polárkoordinátás egyenletét! Amit kaptunk, ismerős valahonnan?
21. (*) Előadáson beláttuk, hogy ha f az x_0 -ban kétszer differenciálható, $f'(x_0) = 0$, és $f''(x_0) > 0$, akkor f -nek x_0 -ban lokális minimuma van.
- (a) Igazolja, hogy ha $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \dots, 2n-1$, és $f^{(2n)}(x_0) > 0$, akkor f -nek x_0 -ban lokális minimuma van.
- (b) Igazolja, hogy ha $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, \dots, 2n$, és $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, akkor f -nek x_0 -ban nincs lokális szélsőértéke.
22. (a) Igazolja, hogy ha $f''(x_0) = 0$, és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f -nek x_0 -ban inflexiós pontja van.
- (b) (*) Igazolja, hogy ha $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 2, \dots, 2n$, és $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, akkor f -nek x_0 -ban inflexiós pontja van.
- (c) (*) Igazolja, hogy ha $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 2, \dots, 2n-1$, és $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$, akkor f -nek x_0 -ban nincs inflexiós pontja.
23. (*) Előadáson szerepelt korábban, hogy az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha $\forall a, b \in I$ és $\forall 0 \leq t \leq 1$ esetén: $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ (ez ugyanis azt fejezi ki, hogy minden szelő/húr a függvénygörbe fölött halad).
- (a) Igazoljuk a *Jensen-egyenlőtlenséget*: ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ -re, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ pontokra és olyan $0 \leq t_i \leq 1$ számokra ($i = 1, \dots, n$), melyek teljesítik a $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ feltételt, igaz, hogy:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n).$$

- (b) Lássuk be a számtani és k -ad rendű közepek közti egyenlőtlenséget: ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges pozitív számok, és $k > 1$ rögzített egész szám, akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}}.$$

(*Útmutatás:* Előző részfeladat, és alkalmas $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények konvexitása.)

24. Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diffható. ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.) Igazoljuk, hogy f konvex, akkor és csak akkor, ha f grafikonja az érintőegyenesei felett fekszik.