Matematika szigorlat mérnököknek Írásbeli gyakorló példasor 3.

1. Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát az $\mathbb{R}^3$ tér vektorai
   (a) egy pontra való tükrözésének,
   (b) egy egyenesre való merőleges vetítésének,
   (c) egy síkra való tükrözésének!

   Alternatív feladat

   Határozza meg a képterét, magterét, ezek dimenzióját, sajátértékeit, sajátvektorait, determinánsát, nyomát az $\mathbb{R}^2$ sík vektorai
   (a) egy pontra való tükrözésének,
   (b) egy egyenesre való tükrözésének,
   (c) egy egyenesre való merőleges vetítésének,
   (d) origó körüli α szögű pozitív irányban történő elforgatásának.

2. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Írja fel $f(x)$ $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát. Adja meg a sor konvergenciatartományát és $\int_0^{1/3} \frac{\sin x^2}{x^2}\, dx$ értékét 10^{-5} pontossággal. ($3^6 = 729$, $3^{11} = 177147$)

3. Adja meg az $y' \cos y + \sin y = x + 1$ differenciálegyenlet általános megoldását és az $y(0) = \frac{5\pi}{2}$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

4. Adja meg a $\mathbf{v_1}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2\mathbf{r}$ és a $\mathbf{v_2}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ vektormezők divergenciáját és az origó körüli 5 egység sugarú gömb felületén vett felületi integrálját!

5. (a) $a = 2$ esetén rajzoljuk fel a következő DE-rendszer fázisképét! Adjuk meg a $(0, 1)$ egyensúlyi pont típusát, és azt, hogy stabil, instabil, aszimptotikusan stabil-e. Határozzuk meg a DE-rendszer általános megoldását és az $x(0) = 0$, $y(0) = 5$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldást.

   (b) Adjuk meg, hogy milyen a esetén lesz stabil, illetve aszimptotikusan stabil a $(0, 1)$ egyensúlyi pont.

   $\dot{x} = x + ay - a$

   $\dot{y} = ax + y - 1.$

6. Legyen egy f deriválható komplex függvény valós része $u(x, y) = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$. Határozzuk meg a képzetes részt, ha tudjuk, hogy $f(-i) = 1$. Számolja ki az $\oint_{|z|=1} f(z)dz$ görbementi integrál értékét! (+) Határozza meg a $D = \{z : \mathrm{Im} z \leq 0, |z| < 1\}$ tartomány képét az f leképezésnél, avagy $f(D) =$?