Fizikus BSc képzés, többváltozós analízis mintavizsga (1).

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 25 perc.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $\alpha = ?$ ha teljes a következő differenciál: $e^x(y^3 + xy^3 + 1)dx + \alpha y^2(xe^x - 6)dy$.

(2) $\int\limits_0^2 \int\limits_{\frac{x}{2}}^1 e^{-y^2} dy dx = ?$

(3) $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$; $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{y}{2}\mathbf{i} + \frac{x}{2}\mathbf{j}$; $\oint\limits_\gamma \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$

(4) Mi $\ln(1+5x)$ hatványsora és annak konvergenciasugara?

(5) Mi a 2π szerint periodikus $f(x) = \sin^4 x$ függvény Fourier sora?

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 2+2+3+3=10 pont.

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ sima függvény, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ belső pontja D-nek. Mi annak (i) *szükséges* illetve (ii) *elégséges* feltétele, hogy f-nek P_0-ban lokális maximumhelye van?
2. Mondjuk ki Banach fixpont tételét!
3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező. Igazak-e a következő állítások? Ha igen, vázoljuk a bizonyítást, ha nem, mutassunk ellenpéldát! (A) Ha $\mathbf{v}$ potenciálos, akkor örvénymentes. (B) Ha $\mathbf{v}$ örvénymentes, akkor konzervatív.
4. Legyenek $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvények, és teljesüljön minden $x \in [a,b]$-re, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Mutassunk példát arra, hogy ekkor nem feltétlenül teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_a^b f_n(x)dx \right) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Milyen további tulajdonságok garantálják az integrálok konvergenciáját? Mondjunk ki egy erre vonatkozó tételt!

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

Fizikus BSc képzés, többváltozós analízis mintavizsga (1).

I. RÉSZ. SEGÉDESZKÖZ NEM HASZNÁLHATÓ. Munkaidő: 25 perc.

I./1. Minimumteszt. Pontozás: 2+2+2+2+2=10 pont.

A numerikus eredmény mellett rövid indoklás/levezetés is szükséges.

(1) $\alpha = ?$ ha teljes a következő differenciál: $e^x(y^3 + xy^3 + 1)dx + \alpha y^2(xe^x - 6)dy$.

(2) $\int\limits_0^2 \int\limits_{\frac{x}{2}}^1 e^{-y^2} dy dx = ?$

(3) $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$; $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{y}{2}\mathbf{i} + \frac{x}{2}\mathbf{j}$; $\oint\limits_\gamma \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$

(4) Mi $\ln(1+5x)$ hatványsora és annak konvergenciasugara?

(5) Mi a 2π szerint periodikus $f(x) = \sin^4 x$ függvény Fourier sora?

I./2. Elméleti kérdések. Pontozás: 2+2+3+3=10 pont.

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ sima függvény, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ belső pontja D-nek. Mi annak (i) *szükséges* illetve (ii) *elégséges* feltétele, hogy f-nek P_0-ban lokális maximumhelye van?
2. Mondjuk ki Banach fixpont tételét!
3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ sima vektormező. Igazak-e a következő állítások? Ha igen, vázoljuk a bizonyítást, ha nem, mutassunk ellenpéldát! (A) Ha $\mathbf{v}$ potenciálos, akkor örvénymentes. (B) Ha $\mathbf{v}$ örvénymentes, akkor konzervatív.
4. Legyenek $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvények, és teljesüljön minden $x \in [a,b]$-re, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Mutassunk példát arra, hogy ekkor nem feltétlenül teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_a^b f_n(x)dx \right) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Milyen további tulajdonságok garantálják az integrálok konvergenciáját? Mondjunk ki egy erre vonatkozó tételt!

II. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: EGY SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP.

Munkaidő: 75 perc. **Pontozás: 9+9+11+11=40 pont.**

1. Keressük meg az $f(x,y) = x^3 + 3y^3$ függvény minimális és maximális értékét az $x^2 + 3y^2 = 1$ feltétel mellett.
2. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ és a $z = 2x + 4y + 4$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogatát!
3. Tekintsük a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{1+r^2}\mathbf{r}$ vektormezőt (szokás szerint $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ és $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).
   (a) $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = ?$
   (b) Legyen γ az $\mathbf{r}(t) = 3\cos(\operatorname{arctg} t)\mathbf{i} + 3\sin(\operatorname{arctg} t)\mathbf{j} + \frac{12 \operatorname{arctg} t}{\pi}\mathbf{k}$; $0 \le t \le \sqrt{3}$ görbe. $\int\limits_{\gamma} \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$
4. (a) $\cos(i) = ?$
   (b) Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reguláris függvény valós része $\sin x \cdot \operatorname{ch} y$. Mi a függvény képzetes része, ha $f(\pi + i) = 0$?
   (c) Számoljuk ki az $\int\limits_{\gamma} (f(z) + \overline{z}) dz$ vonalintegrált, ha $f(z)$ az előző részfeladat függvénye, γ pedig a $-i$ kezdőpontú, i végpontú félkör pozitív irányítással.

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.

II. RÉSZ KIDOLGOZANDÓ PÉLDÁK.

HASZNÁLHATÓ SEGÉDESZKÖZ: EGY SAJÁT KÉZZEL ÍRT A4-es LAP.

Munkaidő: 75 perc. **Pontozás: 9+9+11+11=40 pont.**

1. Keressük meg az $f(x,y) = x^3 + 3y^3$ függvény minimális és maximális értékét az $x^2 + 3y^2 = 1$ feltétel mellett.
2. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ és a $z = 2x + 4y + 4$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogatát!
3. Tekintsük a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{1+r^2}\mathbf{r}$ vektormezőt (szokás szerint $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ és $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).
   (a) $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = ?$
   (b) Legyen γ az $\mathbf{r}(t) = 3\cos(\operatorname{arctg} t)\mathbf{i} + 3\sin(\operatorname{arctg} t)\mathbf{j} + \frac{12 \operatorname{arctg} t}{\pi}\mathbf{k}$; $0 \le t \le \sqrt{3}$ görbe. $\int\limits_{\gamma} \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$
4. (a) $\cos(i) = ?$
   (b) Egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reguláris függvény valós része $\sin x \cdot \operatorname{ch} y$. Mi a függvény képzetes része, ha $f(\pi + i) = 0$?
   (c) Számoljuk ki az $\int\limits_{\gamma} (f(z) + \overline{z}) dz$ vonalintegrált, ha $f(z)$ az előző részfeladat függvénye, γ pedig a $-i$ kezdőpontú, i végpontú félkör pozitív irányítással.

I. RÉSZ A HÁTOLDALON.