Sztochasztika
Feladatsor 3A

1. Legyen X $\mathbb{N}$-értékű valváltozó. Jelöljük $G(z)$-vel a generátorfüggvényét. Írjuk fel $Y := X + 1$ és $Z := 2X$ generátorfüggvényét G segítségével.

2. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.

   (a) Írjuk fel egy dobókocka generátorfüggvényét. Hogyan kapható meg ebből $\mathbb{E}Y$ értéke?

   (b) Írjuk fel X generátorfüggvényét és számítsuk ki ez alapján $\mathbb{E}X$-et és $\sigma(X)$-et.

3. Egy szabályos dobókockát dobálunk. Jelölje X azt, hányadik dobásra jön ki először egymás után két hatos (pl. 1462655661 sorozat esetén $X = 9$). Határozzuk meg X generátorfüggvényét, majd ennek segítségével X várható értékét és szórását.

4. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy pénzérmét dobálnak, melyen a fej valószínűsége p, az írásé $q = 1 - p$. Ha fej jön ki, Béla fizet Jenőnek 1 forintot, írás esetén pedig Jenő fizet Bélának 1 forintot. Jelölje τ azt, hogy hány kör múlva lesz Jenő nyereménye először 1 forint a játék folyamán (esetleg előfordulhat $\tau = \infty$ is). Legyen $G(x)$ τ generátorfüggvénye, azaz $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n)x^n$.

   (a) Írjunk fel $G(x)$-re egy függvényegyenletet a teljes várható érték tétel segítségével az első dobás alapján. Oldjuk meg az egyenletet és adjuk meg a $G(x)$ függvényt.

   (b) Jelölje θ azt, hogy hány kör múlva lesz először újra döntetlen az állás. Írjuk fel θ generátorfüggvényét, $F(x)$-et, $G(x)$ segítségével.

   (c) Milyen következtetést vonhatunk le $G(1)$ és $F(1)$ értéke alapján?

5. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik $1/4 - 1/4$ valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.

   (a) Jelölje X Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét. Számítsuk ki $\mathbb{E}X$ és $\sigma(X)$ értékét.

   (b) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.

6. Jelölje $\Theta(p)$ a kihalás valószínűségét egy olyan elágazó folyamatnál, melynél az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

   (Ez az ún. pesszimista geometriai eloszlás.)

   Számítsuk ki $\Theta(p)$ értékét tetszőleges $0 < p < 1$ esetén.

7. Tekintsünk egy Poisson(λ) utódeloszlású elágazó folyamatot, ahol $\lambda > 1$. Bizonyítsuk be, hogy az elágazó folyamat eloszlása *azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal*, megegyezik azon elágazó folyamat eloszlásával, amelynek utódeloszlása Poisson(μ), ahol $\mu < 1$ a $\lambda e^{-\lambda} = \mu e^{-\mu}$ egyenlet megoldása. (Figyelem, a teljes folyamat eloszlásáról van szó!)

8. Egy kiszolgálóhoz adatcsomagok érkeznek. Az egy igény kiszolgálása alatt beérkező további igények száma pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a foglaltsági periódus véges (a foglaltsági periódus addig tart, amíg először nincsen sem kiszolgálás alatt álló, sem várakozó igény). Számoljuk ki a foglaltsági periódus alatt kiszolgált igények számának várható értékét. Modellezzük a rendszert elágazó folyamattal. Mik az egyedek? Mik legyenek egy egyed utódai?

Sztochasztika
Feladatsor 3B

1. The generating function of a nonnegative integer valued random variable is

$$g(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$

   What is the discrete probability distribution (namely the probabilities $P(X = k)$)? What is the expectation and variance of X?

2. We toss a fair coin 3 times, and a biased coin with $P(heads) = \frac{1}{3}$ also three times. Let Z denote the total number of heads seen. Calculate the generating function of Z.

3. Let $X_1, X_2, \ldots$ be i.i.d. $\mathbb{N}$ valued random variables. Furthermore, let N be an $\mathbb{N}$ valued random variable which is independent of the Xs. Let Y be equal to $\sum_{i=1}^{N} X_i$. Show that
   - $E(Y) = E(N)E(X_1)$,
   - the variance $D^2(Y)$ of Y is equal to $D^2(N)(E(X_1))^2 + E(N)D^2(X_1)$.

4. We keep rolling a fair die until we first roll a 6. Let X denote the sum of the numbers rolled before (and not including) that 6. Calculate
   - the generating function of X,
   - the expectation of X,
   - the variance of X.

   (Warning: What is the conditional distribution of a number rolled under the condition that it is not a 6?)

5. Between 8 and 9 am the number X of requests arriving to the router has Poisson distribution with parameter λ. Each request may come independently of each other from places A and B with probability p and $(1-p)$ respectively. What is the distribution of the number of requests coming from place A?

6. Between 8 and 9 am the number X of requests arriving to the router has Binomial distribution with parameters (n, r). Each request may come independently of each other from places A and B with probability p and $(1-p)$ respectively. What is the distribution of the number of requests coming from place A?

7. Find the generator functions of the pessimistic and the optimistic geometric distributions!

8. In a certain village there is a person with name Harry WhoIam. There is no other person with this last name. This village is famous from the fact, that each person have 3 children, and the sex of the children is equally likely to be male or female independenty of each other. The newborns get the last name of their fathers.
   - What is the probability that Harry WhoIam will have grandson with last name WhoIam?
   - What is the expected number of grandsons with last name WhoIam?
   - What is the probability of the extinction of last name WhoIam in the village?

9. Assume that a maleware is infecting the computers of an infinite size population of computers. If a computer is infected then by the end of the next day one of the following possibilities occurs. It is detected and deleted with probability p. Consequently, it is not infectious anymore. With probability $(1-p)p$ it is not deleted and does not infect other computer. Further, it is not deleted and it infects $k-1$ new computers having not infected to that date with probability $(1-p)p^k$ for $k = 2, 3, \ldots$. Assume that the contribution of each infected computer is independent of the other infected computers' contributions. In the end of 0'th day there is one infected computer. Answer the following questions in case of $p = \frac{1}{4}$ and $p = \frac{2}{3}$.

- Find the expected number of infected computers in the end of 30'th day!
- What is the probability that there is not infected computer in the end of the 3'th day?
- What is the probability that the maleware will be never perished?

10. In order to help some friends, Harry becomes the east cost sales representative of B& D Software. The software has been favorably reviewed and demand is heavy. Harry sets up a sales booth at the local computer show and takes orders. Each order takes three minutes to fill. While each order is being filled there is a probability p_j that j more customers will arrive and join the line. Assume $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{1}{3}$ and $p_2 = \frac{1}{6}$. Harry cannot take a coffee break until a service is completed and no one is waiting in the line.

    - What is the probability that Harry will have coffee break?
    - What is the expected number of customers he serves before the first coffee break?
    - What is the generator function of the number of customers he serves before the first coffee break?
    - Answer the previous questions if $p_0 = \frac{1}{6}$, $p_1 = \frac{1}{3}$ and $p_2 = \frac{3}{6}$!