4. feladatsor

Nagy eltérések

1. Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G. Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!

   (a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k.

   (b) A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

2. Az emberek IQ-ja normális eloszlást követ 100 várható értékkel és 15 szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletenül választott ember IQ-ja 120-nál nagyobb?

3. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab független és azonos eloszlású valószínűségi változó összege a [0, 30] intervallumba esik, ha egy ilyen változó eloszlása a [0, 1] intervallumon egyenletes?

4. Egy szabályos dobókockát feldobunk 30000-szer. Jelölje S a hatosok számát. Olyan x értékre szeretnénk becslést adni, amelyet S 95% eséllyel nem lép át.

   (a) CHT alapján adjunk becslést x-re.

   (b) Berry–Esseen-tétel alapján korlátozzuk a CHT hibáját, majd ez alapján adjunk x-re alsó és felső becslést.

   (c) Hoeffding-korlát alapján adjunk felső becslést x-re.

5. Egy stadionban a mérkőzések szünetében a nézők üdítőt vesznek a büfében. Az egy néző által vásárolt üdítő mennyiségének várható értéke 1 liter és szórása 1 liter. Mennyi üdítővel készüljön a büfé a vasárnapi meccsre, ha tudják, hogy 40000 jegyet adtak el, és azt szeretnék, hogy legfeljebb 2% eséllyel ne tudjanak kiszolgálni minden szomjas nézőt? (Feltesszük, hogy akinek van jegye, az el is jön. A büfében egyféle üdítőt lehet kapni.)

6. Egy szabályos pénzérmét feldobunk 1000-szer. Adjunk Cramér-tétel alapján becslést annak a valószínűségére, hogy legalább 600 fejet kapunk. (Segítség: a p paraméterű Bernoulli-eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln\left(\frac{(1-p)x}{p(1-x)}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$, illetve a p paraméterű optimista geometriai eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{(1-p)x}\right) + \ln\left(\frac{1-p}{p(x-1)}\right)$.)

7. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 1000 forintot tesz ‘piros’-ra. 200 játék után 15000 forint a vesztesége. Érdemes-e csalásra gyanakodnia? (A rulettkorongon összesen 37 mező szerepel, melyek közül 1 zöld, 18 piros és 18 fekete. Szabályos játék esetén mindegyik egyforma eséllyel jön ki.)

8. Egy városban 40000 család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét mennyisége semmiképpen nem több, mint 50 liter; a várható értéke 20 liter, szórása 10 liter.

   (a) Mekkora napi kapacitású szemétégető üzemet építsen az önkormányzat a háztartási szemétnek, ha azt szeretnék, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen? Adjunk becslést a CHT alapján.

(b) Miért nem alkalmazható a CHT, ha az önkormányzat 1% helyett 10^{-8}-os biztonságot szeretne? Ebben az esetben adjunk becslést a Hoeffding-korlát segítségével.

9. Az épülő kelet-szibériai kőolajvezeték mintegy 700 olajkút termelését gyűjti majd össze és szállítja Kína felé. Az olajkutak napi termelése független; semelyiké nem kevesebb, mint 490 hordó és nem haladja meg az 1380 hordót, és az átlagos termelésük egy nap összesen 560000 hordó.

   (a) Mekkora legyen az olajvezeték kapacitása, ha az üzemeltető azt szeretné, hogy a napi termelés legfeljebb 10^{-10} eséllyel legyen nagyobb a kapacitásnál?

   (b) A kutakról részletesebb információt is kapunk, amiből kiderül, hogy 400 kút termelése mindenképpen 490 hordó és 1040 hordó közé esik, a többi 300 kút termelése pedig mindenképpen 880 hordó és 1380 hordó közé esik. Ez alapján adjunk jobb becslést a szükséges kapacitásra.

   (Megjegyzés: a kőolajvezeték valóban létezik (bár mostanra már megépült), ESPO pipeline néven érdemes rákeresni.)

10. Egy épülő erőmű zsinóráramot termel, teljesítménye 100 MW. Az árammal a közeli 120 üzem egy részét látják el; az üzemek mindegyikének fogyasztása legalább 1 MW, legfeljebb 2 MW, átlagosan 1,5 MW (a fogyasztás óránként konstansnak tekinthető). Számítsuk ki, hogy legalább hány üzemet kell az erőműre kötni, ha azt szeretnénk, hogy az összfogyasztásuk egy adott órában legfeljebb 10^{-7} eséllyel legyen *kevesebb*, mint az erőmű teljesítménye. (A hiányzó áramot az erőművek megkapják más forrásból, ezzel most nem kell foglalkoznunk.)

11. Egy zajos adatátviteli csatornán minden egyes átvitt bit a többitől függetlenül $\frac{1}{100}$ valószínűséggel sérül. Ezért egy olyan, 1000 bitből álló sorozatot küldünk át a csatornán, amiből még 100 bit sérülése esetén is rekonstruálható az eredeti üzenet.

    (a) Móricka a centrális határeloszlás tétellel próbálja megbecsülni, hogy milyen valószínűséggel lesz mégis gond - vagyis milyen valószínűséggel sérül 100-nál több bit. Legfeljebb mekkora lehet Móricka közelítésének hibája a Berry-Essen tétel szerint? (A Berry-Essen tételben szereplő C konstans egy 2011-es eredmény szerint választható C=0.4748-nak.)

    (b) Becsüljük meg valamelyik nagy eltérés tétel segítségével, hogy milyen valószínűséggel sérül 100-nál több bit. (Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}$.)

12. Egy kiszolgálószerverhez adatcsomagok érkeznek Poisson-folyamat szerint, másodpercenként átlagosan 1 csomag. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy egy óra alatt legalább 4000 csomag érkezik...

    (a) CHT alapján;

    (b) CHT és Berry–Esseen-tétel alapján;

    (c) Hoeffding-korlát alapján;

    (d) Cramér-tétel alapján. (Az Exp(λ) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = \lambda x - 1 - \ln(\lambda x)$.)