6. feladatsor
Folytonos idejű Markov-láncok

1. Egy diszkrét idejű Markov-lánc átmenet-mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Folytonos idejű Markov-láncot készítünk belőle úgy, hogy az egyes állapotokban eltöltött idő exponenciális rendre 1, 2, 1, 4 paraméterrel.

   (a) Írjuk fel a generátort.
   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Mi a kapcsolat a stacionárius eloszlás és az eredeti diszkrét Markov-lánc stacionárius eloszlása között?
   (c) A Markov-lánc a 0 időpontban az 1-es állapotban tartózkodik. Adjunk becslést arra, hogy mekkora a valószínűséggel tartózkodik a 2-es állapotban a $t = 100$ illetve a $t = 0.1$ időpontokban.
   (d) A Markov-lánc a 0 időpontban az 1-es állapotban tartózkodik. Adjunk becslést arra, hogy mekkora a valószínűséggel tartózkodik végig a 2-es állapotban a $t = [100, 101]$ időintervallumban.
   (e) Az első állapotból indulva mennyi a 4. állapot eléréséig szükséges idő várható értéke?

2. Egy gép $\mathrm{Exp}(0,1)$ ideig működik (órában mérve), majd elromlik. Ha elromlott, azonnal elkezdik javítani; a javítás $\mathrm{Exp}(0,5)$ ideig tart (órában), és független a működési időszak hosszától.

   (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az infinitezimális generátort.
   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú idő alatt a teljes idő mekkora része telik javítással?
   (c) Amíg a gép működik, óránként 6000 forint bevételt termel. A szerelő óradíja 3000 forint. Mekkora ,,nettó" bevételt termel óránként a gép hosszú távon?
   (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenetmátrixát. (Ebben az esetben nem túl izgalmas.)

3. Egy forgalmas helyen lévő pénzváltóba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 2 percig tart. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül még legfeljebb ketten tartózkodhatnak a helyiségben; ha olyankor érkezne ügyfél, amikor a helyiség tele van, akkor azonnal továbbmegy (mondjuk egy másik pénzváltóhoz).

   (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
   (c) Hosszú távon az idő mekkora részében van tele a helyiség?
   (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenetmátrixát.

4. Egy autószerelő műhelyében az autók száma 0 és 5 között változhat. A javítandó autók Poisson folyamat szerint érkeznek, átlagosan 3 óránként, és ha van hely, beállnak (ha nincs, elkullognak). A szerelő, ha van bent legalább egy autó, akkor éjjel-nappal dolgozik, és a soron következő autó javításával (az előzményektől független) exponenciális eloszlású véletlen idő alatt végez, melynek várható értéke 2 óra. Legyen $X(t)$ a műhelyben lévő autók száma a t időpillanatban, $t \geq 0$.

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

(b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

(c) Kezdetben a műhely üres. Közelítőleg mennyi a valószínűsége annak, hogy pont egy hónap elteltével éppen tele van?

(d) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz a műhely tele?

(e) Hosszú távon mennyi lesz a műhelyben lévő autók számának időátlaga?

5. Egy bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyféltérben egyszerre legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt lévőket is). Amikor az ügyféltér tele van, a biztonsági őr automatikusan elküldi a további ügyfeleket. A bankfiókba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 8 percet vesz igénybe. Ha egy ügyfelet kiszolgálnak, a sorban következő azonnal beáll a felszabaduló ablakhoz. Ha mindkét ablak szabad, amikor egy ügyfél érkezik, akkor találomra áll be valamelyikhez.

   (a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

   (b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását.

   (c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

   (d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

   (e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?

   (f) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?

6. Egy távközlési kábelen három független adatfolyam megy. Az adatfolyamok egyformák; egy adatfolyamnak két állapota van: ON állapotban 1 Mb/s a sebessége, OFF állapotban 0 Mb/s. ON állapotból λ rátával lép át OFF állapotba és OFF állapotból μ rátával lép át ON állapotba. Az adatfolyamok egymástól függetlenek. Jelölje X_t azt, hogy a t időpontban mennyi a három adatfolyam együttes sebessége. Gondoljuk meg, hogy X_t-re teljesül a Markov-tulajdonság, majd írjuk fel a generátorát.

7. Tivadar szabadúszó programozó. Kétféle munkát vállal, melyek hossza véletlenszerűen változik. Az A típusú munka átlagosan 1 hónapig tart, a B típusú munka átlagosan 2 hónapig tart. Amikor Tivadar egy munkája véget ér, akkor átlagosan 2/3 hónap telik el, míg érkezik megrendelés A típusú munkára, illetve átlagosan 1 hónap telik el, amíg érkezik megrendelés B típusúra. Azt vállalja el, amelyik előbb jön.

   (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

   (c) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 40, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

   (d) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.

   (e) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?