

Matematika A4

13. hét

1. Az u -próba (más néven: z -próba)

Legyenek mérési eredményeink: X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos *normális* eloszlású valószínűségi változók a közös $\mu = \mathbb{E}(X_k)$ várható értékkel és $\sigma = \mathbb{D}(X_k)$ szórással. Vegyük a mérési eredményeink számtani átlagát: $\bar{X}_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$. Ekkor

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu, \quad \mathbb{D}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{és legyen} \quad Z := \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

A fentiekből következik, hogy Z standard normális eloszlású valószínűségi változó.

(a) Becslés. A statisztika egyik alapfeladata *becslést, konfidencia intervallumot* adni mérési eredmények eloszlásának egy ismeretlen paraméterére. Legyen a μ várható érték ismeretlen és a σ szórási ismert.

A feladatunk: Mérési eredményeink alapján adjunk meg olyan intervallumot, amely $1 - \alpha$ valószínűséggel (pl. $\alpha = 0.05$) tartalmazza az ismeretlen μ paramétert. Jelölje $z_{\alpha/2}$ a standard normális eloszlás táblázatából visszakeresett azon számot, aminél nagyobb értéket Z csak $\alpha/2$ valószínűséggel vesz fel. Ekkor a fentiek szerint $\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, és így a keresett (véletlen!) konfidencia intervallum

$$\left(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

(b) Hipotézis vizsgálat. A statisztika másik alapfeladata mérési eredmények eloszlásának egy ismeretlen paraméterére vonatkozó hipotézisek vizsgálata. Legyen megint a μ várható érték ismeretlen és a σ szórási ismert.

A feladatunk: A mérési eredményeink alapján döntsük el azt a hipotézist (feltevést), hogy az ismeretlen μ paraméter értéke egy adott μ_0 szám-e. Ehhez meg kell adnunk egy megfelelően kicsi α *szignifikancia-szintet* is, pl. $\alpha = 0.05$. A szignifikancia-szint elnevezés arra utal, hogy abban az esetben, ha az ismeretlen paraméter értéke tényleg μ_0 , csak α (kis) valószínűséggel forduljon elő az az *elsőfajú hiba*, hogy a mérési eredmények megcáfolni látszanak a hipotézisünket.

Fontos megérteni, hogy a statisztikában tipikusan nincs abszolút bizonyosság. Pozitív valószínűséggel döntésünk hibás lesz. Tipikusan *másodfajú hibát* is pozitív valószínűséggel követhetünk el: elfogadjuk a hipotézist olyankor, amikor $\mu \neq \mu_0$.

A döntésünket adott μ_0 esetén az

$$U := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

véletlen mennyiségre alapozzuk. A fentiek szerint, ha $\mu = \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} < U < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu = \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $|U| < z_{\alpha/2}$, másképpen:

$$\mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n < \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

egyébként a hipotézist elvetjük. Az itt szereplő alsó és felső korlátokat \bar{X}_n -re *kritikus értékeknek* is nevezzük.

A másodfajú hiba valószínűségét az *erőfüggvény* mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu - \mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórási 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(|U| < z_{\alpha/2}) = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu = \mu_0$, akkor $f(\mu_0) = 1 - \alpha$ (pl. 0.95), nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ távolodik μ_0 -tól, ez a valószínűség folytonosan, haranggörbe alakban csökken le zérushoz közeli értékekre.

(c) **Egyoldalú eset.** A fentiekben az ún. *kétoldalú* esetet vizsgáltuk. Mind a konfidencia intervallum, mind a hipotézis vizsgálat könnyen kiterjeszhető *egyoldalú* esetre is, amikor pl. csak véges felső korlátot akarunk mondani az ismeretlen μ paraméterre, az alsó „korlát” $-\infty$. Ez olyankor előnyös, amikor az egyik oldali korlátnak nincs gyakorlati jelentősége. Például ha a μ várható érték egy páciens gyógyulási idejének várható értéke egy most vizsgált gyógyszer hatására, akkor csak az a probléma, ha μ túl nagy.

Elsőként adjunk meg olyan *egyoldalú* $(-\infty, x)$ *konfidencia intervallumot*, amely $1 - \alpha$ valószínűséggel tartalmazza az ismeretlen μ paramétert. Jelölje z_α a standard normális eloszlás táblázatából visszakeresett azon számot, aminél nagyobb értéket Z csak α valószínűséggel vesz fel. Ekkor a fentiek szerint $\mathbb{P}(-\infty < Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$, és így a keresett véletlen konfidencia intervallum

$$\left(-\infty, \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Másodikként, döntsük el azt a *hipotézist*, hogy az ismeretlen paraméter értéke *legfeljebb* egy adott μ_0 szám. Ehhez meg kell adnunk egy megfelelően kicsi α szignifikancia-szintet is, pl. $\alpha = 0.05$. Továbbá számítsuk ki az $U := \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ értéket a mérési eredmények alapján. A fentiekhez hasonlóan, ha $\mu \leq \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-\infty < U < z_\alpha) \geq 1 - \alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu \leq \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $U < z_\alpha$, másképpen $\bar{X}_n < \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, egyébként a hipotézist elvetjük. Az itt szereplő felső korlátot \bar{X}_n -re kritikus értékek nevezzük.

A másodfajú hiba valószínűségét az erőfüggvény mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu - \mu_0) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórása 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(-\infty < U < z_\alpha) = \Phi\left(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu \leq \mu_0$, akkor $f(\mu) \geq 1 - \alpha$, nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ nagyobb lesz μ_0 -nál és tart ∞ -hez, ez a valószínűség (az erőfüggvény) folytonosan csökken le zérushoz közeli értékekre.

Az egyoldalú eset másik variánsa, ha csak *alsó korlátot keresünk*, azaz (x, ∞) alakú intervallumot. Ekkor értelemszerűen minden megfordul. A konfidencia intervallumnál $\mathbb{P}(-z_\alpha < Z < \infty) = 1 - \alpha$, és így a konfidencia intervallum

$$\left(\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right).$$

Döntsük most el azt a hipotézist, hogy az ismeretlen paraméter értéke *legalább* egy adott μ_0 szám. A fentiekhez hasonlóan, ha $\mu \geq \mu_0$, akkor $\mathbb{P}(-z_\alpha < U < \infty) \geq 1 - \alpha$. Így akkor és csak akkor fogadjuk el a $\mu \geq \mu_0$ hipotézist, ha a mérési eredményeinkből számított U értékre fennáll, hogy $-z_\alpha < U$, másképpen $\mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n$, egyébként a hipotézist elvetjük.

A másodfajú hiba valószínűségét most is az erőfüggvény mutatja meg. Mivel U várható értéke $(\mu - \mu_0) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ és szórása 1, ezért az ismeretlen μ paraméter függvényében az erőfüggvény

$$f(\mu) := \mathbb{P}(-z_\alpha < U < \infty) = 1 - \Phi\left(-z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

Ha a hipotézis fennáll, azaz $\mu \geq \mu_0$, akkor $f(\mu) \geq 1 - \alpha$, nagy valószínűséggel elfogadjuk a hipotézist. Ahogy μ kisebb lesz μ_0 -nál és tart $-\infty$ -hez, ez a valószínűség (az erőfüggvény) folytonosan tart zérushoz.

Feladatok:

Az u -próbához megadott feladatokban szereplő valószínűségi változókat vegye normális eloszlásúaknak!

- Öt hallgató egy laborban a következő mérési eredményeket kapta elvileg ugyanarra az áramerősségre egy kissé lestrapált ampermérővel: 15.2, 15.7, 14.6, 16.8, 13.9 A. A mérés szórása 2 A. Adjon meg olyan konfidencia intervallumot, amely az áramerősség várható értékét a) 0.8 b) 0.9 c) 0.99 valószínűséggel tartalmazza! Hány kísérlettel lehetne 1.2 A hosszúságú 95%-os konfidencia intervallumot megadni?
- Idei kékfankosunk alkoholtartalmát mérjük. Mérés módszerünknek van egy kis véletlen hibája, 0 várható értékkel, 0.5% szórással. Tíz mérés átlaga 12.61% volt. Konstruáljunk egy szimmetrikus 95%-os konfidenciaintervallumot.
- Öt hallgató egy laborban a következő mérési eredményeket kapta elvileg ugyanarra az áramerősségre egy kissé lestrapált ampermérővel: 15.2, 15.7, 14.6, 16.8, 13.9 A. A mérés szórása 2 A. Egy hivatalos dokumentum szerint az áramerősség 15A. 1%-os elsőfajú hiba mellett dolgozva mit mondhatunk az állításról?

4. Az alábbi két minta 5 - egyforma képességűnek feltételezett - sportoló súlylökésben elért eredményeit tartalmazza. Az első dobás előtt az edző büszkén állította, hogy tanítványai átlagosan legalább 17 métert dobnak, amit a klub igazgatója kétségbe vont. Úgy döntött, hogy csak akkor hosszabbítja meg az edző szerződését, ha a $H_0 : m \geq 17$ hipotézis $\alpha = 0,05$ elsőfajú hibavalószínűség mellett elfogadható a $H_1 : m < 17$ alternatívával szemben. Korábbi tapasztalatok alapján a dobások szórása 2-nek tekinthető.

- (a) Hogyan döntött az igazgató?
 (b) Az igazgató még egy esélyt adott az edzőnek. Ő az első kísérlet után mindenkinek elmagyarázta, hogy mire kellene odafigyelnie a jobb eredmény érdekében. Tapasztalható javulás (a különbség változó szórása 1,5)?
 (c) A második dobássorozat alapján maradhat az edző?

első eredmény	14,8	12,2	16,8	17,1	16,1
második eredmény	18,0	12,1	17,2	17,7	17,0

5. Megvizsgálták, hogy 8 ember mekkora távolságot tudott 5 perc alatt lefutni. Ezután mindenki 3 napig diétázott és így is megmérték a futásteljesítményt. A szórás 63 méternek tekinthető. Befolyásolta-e a diéta a teljesítményt?

diéta előtt	1520	1830	1620	1740	1970	2130	1910	2000
diéta után	1630	1810	1700	1800	1930	2100	1960	2160

6. Egy deszkagyárban ellenőrizni szeretnénk, hogy a gyártott deszkák hosszának várható értéke megegyezik-e a szükséges 180 cm-rel. A hossz szórása 10 cm. Azt szeretnénk, hogy ha megegyezik, akkor legalább 0.85 valószínűséggel fogadja el ezt a hipotézist a próba, és ha a deszkák várható értéke 165 cm alatt vagy 195 cm felett van, akkor legalább 0.8 valószínűséggel a próba vesse el a 180 cm-es hipotézist. Válassza meg a kritikus értékeket és a szükséges mintaelemszámot (azaz a megméréendő deszkák számát)!
7. Egy deszkagyárban ellenőrizni szeretnénk, hogy a gyártott deszkák hosszának várható értéke eléri-e a minimális 180 cm-t. A hossz szórása 10 cm. Azt szeretnénk, hogy ha eléri, akkor legalább 0.85 valószínűséggel fogadja el ezt a hipotézist a próba, és ha a deszkák várható értéke 165 cm alatt van, akkor legalább 0.8 valószínűséggel a próba vesse el a ≥ 180 cm-es hipotézist. Válassza meg a kritikus értéket és a szükséges mintaelemszámot!

2. Chi-négyzet és t-próbák

8. Egy hatoldalú dobókockán 600 dobás alatt az egyes értékek gyakorisága a következő:

1	2	3	4	5	6
75	109	89	118	95	114

Elfogadjuk-e 90%-os szinten azt a hipotézist, hogy a kocka szabályos? És 99%-os szinten?

9. Egy izzókat gyártó cégnek ezer izzóját teszteltük, az eredményt a következő táblázat foglalja össze:

élettartam (év)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7<
darabszám	296	227	137	104	69	49	30	88

Elfogadjuk-e 95%-os szinten, hogy az izzók életkorának eloszlása exponenciális $\frac{1}{3}$ paraméterrel?

10. Egy oldat sótartalmát mérjük laborban. 5 mérést végzünk, melyek során a sótartalomra rendre a következő értékek adódtak (gramm/liter): 7.7, 8.1, 7.7, 7.5, 7.0. Az oldatról előzetesen azt állították, sótartalma 7 g/l. Elfogadjuk-e ezt 95%-os szinten azon hipotézis ellenében, hogy a sótartalom nem 7 g/l?

11. Egy gyárban azt vizsgálják, milyen módon lehetne növelni a munkások termelékenységét. Kétféle módot tesztelnek: (A) fizetésemelés, (B) munkakörülmények javítása. Két külön csoporton tesztelnek. Az alábbi két táblázat tartalmazza a termelékenység változását.

(A)

munkás	1	2	3	4	5	6
változás	1.1	0.2	-0.1	2.2	1.3	1.3

(B)

munkás	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
változás	1.3	2.5	1.2	0.8	0.3	1.9	3.2	2.4	2.2	3.2

- (a) Fogadjuk el vagy utasítsuk el 95%-os szinten azt a nullhipotézist, hogy a fizetésemelés nem változtatja a termelékenységet.
- (b) Fogadjuk el vagy utasítsuk el 95%-os szinten azt a nullhipotézist, hogy a munkakörülmények javítása nem változtatja a termelékenységet.
- (c) Fogadjuk el vagy utasítsuk el 95%-os szinten azt a nullhipotézist, hogy a munkakörülmények javítása nem növeli jobban a termelékenységet, mint a fizetésemelés.