15. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású ϑ/t várható értékkel, ha t hőmérsékleten működtetjük. Tegyük fel, hogy az n megfigyelést a különböző $t_1, ..., t_n$ hőmérsékleten végeztük és $x_1, ..., x_n$ élettartamokat figyeltünk meg. Adjunk maximum likelihood becslést ϑ-ra.

18. Egy város energiafogyasztása (megfelelő mértékegységben) 100 várható értékű és egységnyi szórású normális eloszlású valószínűségi változó. ϑ nap után egy konstans, egységnyi fogyasztású üzem is megkezdte a működését. Adjuk meg a likelihood-függvényt $x_1, ..., x_n$ megfigyelés alapján. Adjunk maximum likelihood becslést az alábbi adatsor esetén: 99,2, 101,4, 99,7, 100,2, 102,4, 100,1, 101,6, 99,8, 102,4, 100,5.

19. Egy laborban a mérést általában az (ismert) σ szórású műszeren végzik. n ilyen mérés elvégzése után (a független, azonos $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású adatok: $x_1, ..., x_n$) elromlott a készülék és csak a régi, $k\sigma$ (szintén ismert) szórású műszert lehetett használni. Ezzel a műszerrel az $y_1, ..., y_m$ adatokhoz jutottunk (μ változatlan). Adjunk maximum likelihood becslést μ-re.

15. A likelihood-függvény:

15

$$L(\vartheta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\vartheta} e^{-\frac{x_i t_i}{\vartheta}},$$

ahonnan a likelihood-egyenlet

$$-\frac{n}{\vartheta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i t_i}{\vartheta^2} = 0,$$

$$\boxed{\text{így } \hat{\vartheta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i t_i}{n}}$$

18. A likelihood-függvény:

$$L(\vartheta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\vartheta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}} \cdot \prod_{j=\vartheta+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_j-\mu-1)^2}{2}} = c \cdot e^{\sum_{\vartheta+1}^{n}(x_j-\mu-1/2)},$$

ahol c nem függ ϑ-tól. A maximalizálás gyakorlati megoldásához elegendő a kitevőben szereplő részletösszegeket rendre felírni és közülük a maximálisat kiválasztani. A számpélda esetén ily módon $\hat{\vartheta} = 4$ adódik.

19. Az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}k\sigma} e^{-\frac{(y_j-\mu)^2}{2(k\sigma)^2}},$$

ahonnan a likelihood-egyenlet

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \mu) = 0,$$

és így a becslés:

$$\hat{\mu} = \frac{k^2 \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j}{k^2 n + m}.$$

A kapott becslés tehát egy olyan súlyozott átlaga a megfigyeléseknek, ahol az együtthatók öszege 1, de ($k > 1$ esetén) az x_i megfigyeléseknek nagyobb a súlyuk, mint az y_j-knek.