

Matematika A4

IX. gyakorlat

1. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.

-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Az X marginális sűrűségfüggvénye

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Az Y marginális sűrűségfüggvénye

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

A $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

Az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

Fontos az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x) dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Függetlenség: X, Y valószínűségi változók $f(x, y)$ közös sűrűségfüggvénnyel. X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ alakban áll elő. Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(y|x) = f_2(y) \quad \text{illetve} \quad f_{1|2}(x|y) = f_1(x) \quad .$$

Feladatok:

1. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x, y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

2. Határozzuk meg c -t úgy, hogy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

3. Vegyük az $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ ($x, y > 0$) sűrűségfüggvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

- a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
- b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
- c) $0 < X < 1$
- d) $3 < Y < 5$

4. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket: $A = \{X > \frac{1}{2}\}$ és $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$.

- a) Határozzuk meg (X, Y) eloszlásfüggvényét, majd annak segítségével a sűrűségfüggvényét!
- b) Az együttes sűrűségfüggvényből határozzuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényeit!
- c) $P(A)=?$
- d) $P(B)=?$
- e) $P(A \text{ és } B)=?$
- f) $P(A|B)=?$
- g) $P(B|A)=?$

5. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót: Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

- a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
- b) $P(Y < \frac{1}{4}) = ?$
- c) $P(Y < y) = ?$
6. Vegyük a következő kétdimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.
- a) Számoljuk ki e kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
- b) Legyen $t(x, y) = xy$. Mennyi a $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
- c) Legyen $t(x, y) = xy^2$. Mennyi a $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
7. Legyen X a $[0, 1]$ -en egyenletes, Y pedig az $[X, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mi az együttes sűrűségfüggvényük? Mi X várható értéke?
8. Legyen $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$, egyébként 0. Válaszoljunk meg az alábbi kérdéseket:
- a) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
- b) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
- c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
- d) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
- e) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
- f) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$
9. Legyen X a Duna mai bécsi vízállása, Y pedig legyen a holnaputáni budapesti vízállás. Statisztikai megfigyelések alapján (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{6}{5}(x + (y - 1)^2)$ ha $0 < x < 1, 0 < y < 1$, egyébként 0. A mért bécsi vízállás ismeretében adjuk meg annak a valószínűségét, hogy holnapután Budapesten alacsony vagyis $\frac{1}{2}$ -nél kisebb vízállás lesz! (Az adatok nem valósak, továbbá feltesszük, hogy a vízállást egy 0 és 1 közötti szám jellemzi)
10. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
- a) $P(X + Y < 3) = ?$
- b) $P(X + Y < z) = ?$
- c) $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
- d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$
11. Függetlenek-e az alábbi együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók?
- a) $f(x, y) = \frac{1}{x}$ ha $0 < y < x < 1$
- b) $f(x, y) = 2$ ha $0 < y < x < 1$
- c) $f(x, y) = 1/2$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$
- d) $f(x, y) = 2e^{x+2y}$ ha $0 < x$ és $0 < y$
12. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:
- $$f(x, y) = 24xy, \text{ ha } 0 < x, 0 < y, x + y < 1$$
- a) Független-e X és Y ?
- b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 1, \text{ ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

- a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$
- b) Független-e X és Y ?