

1-2 A feladatsor

1. Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje E_1 azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje F azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy E_1 és F nem függetlenek. Legyen E_2 az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7. E_2 független-e F -től?
2. Egy céllövöldében hat puska van. Közülük három olyan, hogy azokkal 0,5 valószínűséggel találunk célba, eggyel a találati valószínűség 0,7, kettővel pedig 0,8. Találomra kiválasztunk egy puskát, majd lövünk. Mekkora a valószínűsége, hogy célbatalálunk? Mekkora a valószínűsége, hogy 0,8-as puskát választottunk, feltéve, hogy a lövésünk talált?
3. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

Legyen X a szabadba kijutáshoz szükséges idő, Y pedig a legelső alkalommal kiválasztott ajtó sorszáma. Gondoljuk meg, miért teljesülnek a következő egyenletek:

$$\mathbf{E}(X | Y = 1) = 2, \quad \mathbf{E}(X | Y = 2) = \mathbf{E}(X | Y = 3) = 1 + \mathbf{E}X$$

$$\mathbf{E}(X | Y = 4) = \mathbf{E}(X | Y = 5) = 3 + \mathbf{E}X.$$

Számítsuk ki $\mathbf{E}X$ értékét.

4. Egy tesztvizsgán 20 kérdés van, mindegyikre igen vagy nem a válasz. Minden kérdésnél három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{5}{7}$; csak azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$ a valószínűsége, és ekkor $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszolunk igent, vagy nemet. Mekkora valószínűséggel válaszolunk az első kérdésre helyesen? Milyen eloszlású a helyes válaszok száma? Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 18 helyes választ érünk el?
5. Egy hőmérő úgy működik, hogy ha a valódi hőmérséklet Celsius-fokban mérve x , akkor a hőmérő $x - 1$ és x között egyenletes véletlenszerű értéket jelez ki. Ezt kiküszöbölendő 5-ször mérnek vele egymás után, majd a legnagyobb értéket veszik figyelembe. Mekkora a valószínűsége, hogy az így kapott szám 0,2 foknál többel tér el a valódi hőmérséklettől?
6. Jelölje X egy szabályos kockával való dobás értékét. Számoljuk ki X várható értékét és szórását.
7. 5 szabályos pénzérmét feldobunk, mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 fejet kapunk?
8. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama, X (100 órában megadva) exponenciális eloszlású úgy, hogy $\mathbf{P}(X > 10) = 0.8$. Mi az eloszlás paramétere és mennyi X várható értéke?
9. Egy teherautón lévő sóder mennyisége 8 és 10 m^3 között egyenletes eloszlású. A teherautóról leömlő sóder egy kúpba rendeződik, ahol a kúp magassága és sugara egyenlő. Mekkora a sóder által elfoglalt terület várható értéke (m^2 -ben)?
10. Egy 500 oldalas könyv 500 sajtóhibát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legfeljebb 2 sajtóhiba van?
11. Számoljuk ki ötöslottón a háromtalálatos szelvény valószínűségét.

12. Egy próbagyártás során 10 gép készül el, melyek közül esetleg néhány hibás. A teljes mennyiségből 3 taláalomra kiszemelt gépet megvizsgálunk. A gyártás akkor indul meg, ha a vizsgálat szerint legfeljebb 1 gép hibás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy megindul a gyártás, ha a 10 gépből...
- (a) 4 hibás?
 (b) 1 hibás? (Mi ebből a tanulság a hipergeometrikus eloszlás formulájára?)
13. Egy alacsony forgalmú úton átlagosan percenként két autó megy el. Kiállunk az út mellé egy adott időpontban. Jelölje X azt, hogy mennyi idő telik el az első autóig. Milyen X eloszlása? Jelölje Y azt, hogy hány autót látunk két perc alatt. Milyen Y eloszlása?
14. Tegyük fel, hogy egy webkiszolgálóhoz percenként átlagosan 5 kiszolgálási igény érkezik. Mi a valószínűsége, hogy egy 30 másodperces periódusban legalább 3 kérést kell kiszolgálni?
15. Egy 120 fős középiskolai évfolyam biológia és matematika jegyei a következőképpen alakultak:

| $B \setminus M$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|---|---|----|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 4 | 8 | 2 |
| 3 | 4 | 8 | 8 | 12 | 4 |
| 4 | 5 | 4 | 6 | 9 | 6 |
| 5 | 4 | 6 | 4 | 6 | 4 |

Kiválasztunk egy tanulót az évfolyamból taláalomra; legyen a matematika jegye X , a biológia jegye Y .

- (a) $\mathbf{P}(\text{a kiválasztott tanuló megbukott legalább az egyik tárgyból}) = ?$
 (b) $\mathbf{E}(X) = ?$
 (c) $\mathbf{E}(X|Y \geq 4) = ?$
 (d) Független-e X és Y ?
 (e) $\text{cov}(X, Y) = ?$