

# Matematika ÉP2

## Térgörbék

### 2021/22. tavaszi félév

## 1. Elméleti összefoglaló

### Fogalmak

A térbeli görbéket egy  $t$  paramétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Úgy képzelhetjük, hogy a térgörbe egy a 3 dimenziós térben mozgó pont pályája (a mozgás egyszerű). Rögzítsük tehát az origóból kiinduló  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$  páronként merőleges egységvektorokat. Ekkor egy az origóból kiinduló vektort a következőképpen adhatunk meg:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}, \text{ vagy} \\ \underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

A paraméter jelölésére azért a  $t$  betűt használjuk ( $t$ =tempus), mert úgy gondolhatjuk, hogy  $\underline{r}(t)$  nem más, mint a mozgó pont pozíciója  $t$  időpontban. Matematikai szempontból az  $\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$  skalár változótól függő vektor értékű függvény. Erre a függvényosztályra a függvénytanban tanult fogalmak és módszerek könnyen átültethetőek. A következőkben feltesszük, hogy az  $x(t)$ ,  $y(t)$  és  $z(t)$  függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, például legalább háromszor differenciálhatóak.

### Derivált

Az  $\underline{r}(t)$  görbe  $t_0$  pontbeli deriváltja az egyváltozós esethez hasonlóan határértékkel definiálható. Kiszámolása:

$$\dot{\underline{r}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)].$$

Tehát a deriváltat itt a fizikában megszokott módon ponttal jelöljük. A görbét definiáló  $\underline{r}(t)$  vektor-skalár függvény  $t_0$  pontbeli érintőjének irányvektora az  $\dot{\underline{r}}(t_0) = [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$  derivált. Tehát az  $\underline{r}(t)$  görbe  $\underline{r}(t_0) = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$  pontbeli érintőegyeneseinek egyenlete:

$$\underline{e}(t) = \underline{r}(t_0) + \dot{\underline{r}}(t_0) \cdot t = [x(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot t, y(t_0) + \dot{y}(t_0) \cdot t, z(t_0) + \dot{z}(t_0) \cdot t],$$

ahol  $-\infty < t < \infty$ .

*Az első derivált fizikai jelentése:* Ha egy térbeli pont mozgását az  $\underline{r}(t)$  vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont sebessége a  $t_0$  időpillanatban  $\dot{\underline{r}}(t_0)$ .

*A második derivált fizikai jelentése:* Ha egy térbeli pont mozgását az  $\underline{r}(t)$  vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont gyorsulása a  $t_0$  időpillanatban  $\ddot{\underline{r}}(t_0)$ . (Megjegyzés: A gyorsulásvektor érintőirányú komponense a tangenciális gyorsulás, míg az erre merőleges komponense a centripetális gyorsulás.)

### Ívhossz

Az  $\underline{r}(t)$  görbének az  $\underline{r}(t_1)$  és  $\underline{r}(t_2)$  pontok közötti darabjának ívhossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt.$$

Ha az  $\underline{r}(t)$  görbére úgy tekintünk, mint egy mozgó pont pályájára, akkor a  $\underline{v} = \dot{\underline{r}}(t)$  sebesség abszolút értéke  $|\dot{\underline{r}}(t)|$  és a  $t_1, t_2$  időpontok között megtett út épp a fenti  $s$ .

*Megjegyzés:* Ha egy pont úgy mozog a görbén, hogy a sebességének abszolút értéke minden időpillanatban  $|\dot{\underline{r}}(t)| = 1$ , akkor a  $t$  idő alatt megtett út  $s = t$ . Az így választott paraméterezést hívjuk ívhossz szerinti paraméterezésnek.

## Görbület

A görbülettel a térgörbének az egyenestől való elhajlását mérjük. Olyan mennyiséget akarunk bevezetni, amely nem függ a görbe paraméterezésétől, csak a görbére jellemző. Így az  $\underline{r}(t)$  görbe  $t$  paraméterű pontjában a görbület:

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}.$$

## Kísérő triéder

A *kísérő triéder* (vagy három él) vektorai:

1. Az érintő irányú egységvektort (érintővektort)  $\underline{t}$ -vel jelöljük és

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t)|}.$$

2. A centripetális gyorsulás ( a gyorsulásvektor érintőirányú komponensére merőleges vektor) egységvektort főnormálisnak nevezünk és  $\underline{n}$ -nel jelöljük. Ekkor

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}.$$

3. A binormális vektor a  $\underline{t}$  érintővektorra és az  $\underline{n}$  főnormálisra egyaránt merőleges és velük jobbrendszer alkotó egységvektor.

$$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}.$$

A sebesség- és gyorsulásvektor által meghatározott síkot *simulósíknak* nevezük. A simulósík tehát az  $\dot{\underline{r}}(t)$  és  $\ddot{\underline{r}}(t)$  vektorok által meghatározott sík. Tartalmazza a  $\underline{t}$  és  $\underline{n}$  vektorokat. A simulósík normálisa a  $\underline{b}$  binormális egységvektor.

A *normálsík* a görbére merőleges sík. Normálisa tehát az  $\dot{\underline{r}}(t)$  érintővektor. A normálsík tartalmazza az  $\underline{n}$  normális és  $\underline{b}$  binormális vektorokat.

A *rektifikáló sík* a  $\underline{t}$  és  $\underline{b}$  vektorok által meghatározott sík. Normálisa az  $\underline{n}$  főnormális vektor.

## Torzió

A torzióval a térgörbének a síkgörbétől való elhajlását mérjük. Most is olyan mennyiséget akarunk bevezetni, amely nem függ a görbe paraméterezésétől, csak a görbére jellemző. Így az  $\underline{r}(t)$  görbe  $t$  paraméterű pontjában a torzió:

$$T = \frac{\dot{\underline{r}}(t)\ddot{\underline{r}}(t)\ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|^2}.$$

A térgörbe görbülete mindig nemnegatív szám. Ezzel szemben a torzió előjeles mennyiség. A torzió pozitív, ha a görbe jobbra csavarodik és negatív, ha balra. Egy síkgörbe torziója zérus.

## 2. Feladatok

1. Írja fel az alábbi térgörbék adott pontbeli érintőegyensének egyenletét!

(a)  $\underline{r}(t) = (t - 3)\underline{i} + (t^2 + 1)\underline{j} + t^2\underline{k}$ ,  $t = 2$     (b)  $\underline{r}(t) = \sin t\underline{i} + \cos t\underline{j} + \frac{1}{\cos t}\underline{k}$ ,  $t = 0$

(c)  $\underline{r}(t) = 2t\underline{i} + \frac{2}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}$ ,  $t = 2$     (d)  $\underline{r}(t) = \frac{t}{1+t}\underline{i} + \frac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}$ ,  $t = 1$

2. Számolja ki az alábbi térgörbék adott szakaszának ívhosszát!

(a)  $\underline{r}(t) = 3 \cos t\underline{i} + 3 \sin t\underline{j} + 2t\underline{k}$ ,  $0 \leq t \leq 4\pi$     (b)  $\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}t^4\underline{k}$ ,  $-1 \leq t \leq 2$

(c)  $\underline{r}(t) = e^t \cos t\underline{i} + e^t \sin t\underline{j} + 2e^t\underline{k}$ ,  $-\infty \leq t \leq 0$     (d)  $\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$

(e)  $\underline{r}(t) = 3t \cos(t) \cdot \underline{i} + 3t \sin(t) \cdot \underline{j} + 2\sqrt{2}t^{3/2} \cdot \underline{k}$ ,  $1 \leq t \leq 3$

3. Számolja ki az alábbi térgörbék adott pontjában a kísérő triédert, illetve adja meg a simulósík, a normálsík és a rektifikálósík egyenletét! Emellett számolja ki a megadott pontban a görbületet és a torziót!

(a)  $\underline{r}(t) = (3t^2 - 3t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}$ ,  $t = 2$     (b)  $\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$ ,  $t = -1$

(c)  $\underline{r}(t) = \frac{t^4}{4}\underline{i} + \frac{t^3}{3}\underline{j} + \frac{t^2}{2}\underline{k}$ ,  $t = 1$     (d)  $\underline{r}(t) = (3t + 7)\underline{i} + (2t^2 + 8)\underline{j} + \frac{1}{6}t^3\underline{k}$ ,  $t = 1$

(e)  $\underline{r}(t) = (t^3 - 2t)\underline{i} + (3t + 2)\underline{j} + (t^2 - 5)\underline{k}$ ,  $t = 1$     (f)  $\underline{r}(t) = \cos^2 t\underline{i} + \cos t \sin t\underline{j} + \sin^2 t\underline{k}$ ,  $t = \frac{\pi}{6}$

4. Határozza meg az  $\underline{r}(t) = (\cos t, t \sin t, (t + 6 \sin t))$  térgörbe görbületét a  $t = \frac{3\pi}{2}$  pontban!

5. Határozza meg az  $\underline{r}(t) = (t, e^{(t+1)^2}, e^{2t+2})$  térgörbe görbületét a  $t = -1$  pontban!

6. Tekintsük az  $\underline{r}(t) = (t, t, \sqrt{2} \operatorname{ch} t)$  görbét a  $(-\infty, \infty)$  intervallumon. Mely pontokban lesz a görbület  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ?

7. Határozza meg azokat a pontokat, ahol az  $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  görbe érintője merőleges lesz az  $x + y + z = 1$  síkra!

8. Tekintsük az  $\underline{r}(t) = (t, t, \operatorname{sh} t)$  görbét a  $(-\infty, \infty)$  intervallumon. Mely pontokban lesz a görbe érintője merőleges az  $x + y + z = 1$  síkra?