

Matematika ÉP2

Komplex számok, 1. gyakorlat

2023/24. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja

A z komplex szám algebrai alakja $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$. x a komplex szám valós része ($Re(z) = x$), míg y a képzetes rész ($Im(z) = y$). A komplex szám abszolút értéke $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, míg a konjugáltja $\bar{z} = x - yi$. A komplex számoknak geometriai reprezentációja is van, mégpedig az xy -sík $P(x, y)$ pontja, vagy az xy -síkban az origóból a $P(x, y)$ pontba mutató \vec{OP} vektor. Amennyiben φ -vel jelöljük az x tengely és az \vec{OP} vektor által bezárt szöveget, illetve r -rel az \vec{OP} vektor hosszát, akkor felírhatjuk a komplex számok trigonometrikus alakját: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Itt az r és φ paraméterek a következő módon számolhatóak:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Műveletek algebrai és trigonometrikus alakban

Tekintsük a z_1 és z_2 komplex számokat, melyek algebrai és trigonometrikus alakja a következő: $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, illetve $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

1. *Összeadás, kivonás:* ALGEBRAI alakban végezhető el. (A valós és képzetes részekre külön-külön elvégezzük az összeadást/kivonást.)

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$

2. *Szorzás:* ALGEBRAI és TRIGONOMETRIKUS alakban is elvégezhető.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

3. *Össztés:* ALGEBRAI és TRIGONOMETRIKUS alakban is elvégezhető. (Algebrai alakban a nevező konjugáltjával bővítünk.)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

4. *Hatványozás:* Legtöbbször TRIGONOMETRIKUS alakban érdemes elvégezni.

$$z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

5. *n*-edik gyökvonás: TRIGONOMETRIKUS alakban végezhető el. A *z* komplex szám *n*-edik gyöke minden olyan *w* komplex szám, melyre $w^n = z$. Minden $z \neq 0$ komplex számnak pontosan *n* db *n*-edik komplex gyöke van: z_0, z_1, \dots, z_{n-1} , ahol

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

2. Feladatok

1. Számolja ki a következő komplex számok esetében a $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1(z_2 - z_1)$; $\frac{z_2^2}{z_1}$ értékeket!

(a) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3i + 4$ (b) $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 + i$

(c) $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -i$ (d) $z_1 = -i + 2$, $z_2 = -4 + 7i$

2. Hozza algebrai alakra a következő kifejezéseket!

(a) $(1 + 6i) - i(-4 + 5i)$ (b) $(1 + i)\overline{(2 - 3i)}$ (c) $\overline{(2 + i)}(4 - 7i)$

(d) $\frac{2 + 4i}{3 - 2i}$ (e) $\frac{1}{(1 - i)^2}$ (f) $\frac{2 + i}{i(1 - 4i)}$

3. Határozza meg i^n értékét, ahol $n \in \mathbb{N}$!

4. Írja fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját!

(a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ (b) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ (c) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

(d) $z = -1 + i$ (e) $z = -2$ (f) $z = -1 - i$

(g) $z = -4i$ (h) $z = -\sqrt{3} + i$ (i) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. Hozza algebrai alakra a következő kifejezéseket!

(a) $4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ (b) $3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ (c) $2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

6. Számolja ki a következő komplex számok esetében a $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ illetve $\frac{z_2^2}{z_1}$ értékeket! (az eredményeket elég trigonometrikus alakban megadni, de fontos a főargumentum, azaz $\varphi \in [0; 2\pi)$)

(a) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ és $z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

(b) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ és $z_2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

7. Végezze el a következő hatványozásokat!

(a) $(1 + i\sqrt{3})^{10}$ (b) $(1 - i)^4$ (c) $(-1 + i)^7$

(d) $(1 + i)^{12}$ (e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^{-9}$ (f) $(2 + 2i)^6$

8. Végezze el a következő gyökvonásokat!

(a) $\sqrt[4]{-16}$ (b) $\sqrt{2i}$ (c) $\sqrt[5]{-243i}$

(d) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$ (e) $\sqrt[3]{-\sqrt{3} + i}$ (f) $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}}$

9. Oldja meg a következő egyenleteket!

(a) $z^3 - 1 = 0$ (b) $z^3 = 1 + i$ (c) $z^2 - 8z + 25 = 0$

(d)* $z^2 + (2 - 2i)z + 2i = 0$ (e)* $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$