Matematika ÉP2
Elsőrendű differenciálegyenletek - további feladatok
2023/24. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Kiemelten fontos

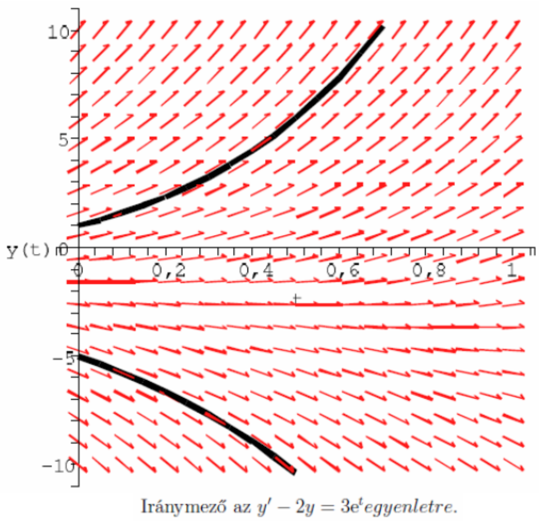
A kockázatok és mellékhatások elkerülése érdekében kérdezze meg fizikusát és vegyészét mielőtt használja a feladatokban szereplő modelleket!

A való életbeli problémák komplexek. Nagyon fontos fejben elkülöníteni a matematikai modellt a valóságtól. A lenti feladatok egyszerű differenciálegyenlettel modelleznek komplex jelenségeket sok tényező elhanyagolásával. A mérnöki/fizikusi munka során szükség lehet komplexebb modellek használatára. Például ha egy tojást vízbe teszünk akkor ha nem elég nagy az edény akkor számolni kell a víz felmelegedésével is. A vízben oldódás fizikája is jóval bonyolultabb a feladatsorban javasolt modellnél.

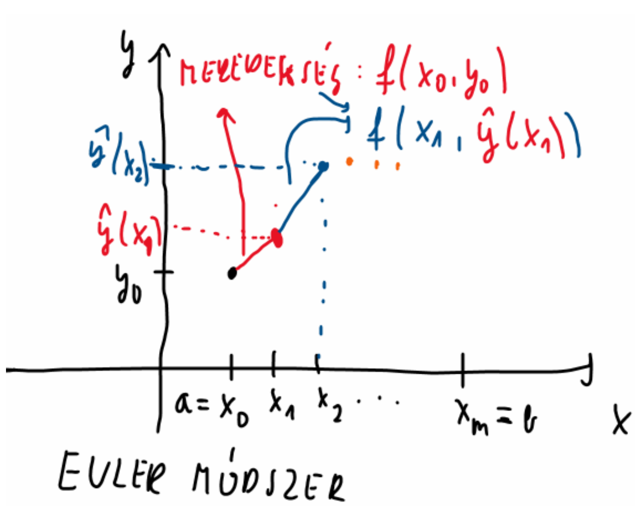
A zh-ban a lenti 9-es feladathoz hasonlóan definiálva lesz a használandó modell. Fontos továbbá, hogy a lenti feladatokban használandó nem feltétlenül pontos modell egy korábbi feladat leírásában szerepel.

Iránymező

Az $y' = f(x, y)$ vagy kirészletezve az $y'(x) = f(x, y(x))$ alakú explicit differenciálegyenlet esetén grafikusan arról van szó, hogy az xy sík minden pontjában az $f(x, y)$ függvény egy meredekséget ír elő. Ezt lehet úgy vizualizálni, hogy a sík (x, y) pontjába egy rövid $f(x, y)$ meredekségű vonalat rajzolunk. Ezt a szemléltetést nevezzük iránymezőnek. A következő példában a változót az időre utalva (tempus) x helyett t jelöli:



Iránymező az $y' - 2y = 3e^t$ egyenletre.



Az általános megoldás keresése azt jelenti, hogy felírjuk az összes olyan $y(x)$ függvényt amely kompatibilis a kis vonalakkal vagyis amelyekre igaz, hogy minden pontban a derivált vagyis az érintő meredeksége megegyezik az előírttal vagyis a kis vonal meredekségével. Cauchy (kezdeti érték) probléma esetén ezek közül kell azt kiválasztani ami átmegy az (x_0, y_0) ponton.

Euler módszer

Az Euler módszer egy egyszerű és nagyon szemléletes módszer az $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ kezdeti probléma $a = x_0$ és b közti közelítő megoldásának meghatározására. Először is kis részintervallumokra bontjuk az $[a, b]$ intervallumot az $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ osztópontokkal. Ezután az osztópontokban meghatározzuk a közelítő értéket majd ezeket egyenesekkel összekötjük. Az osztópontokban a közelítő értékeket egy iteratív eljárással határozzuk meg. Először felvesszük az (x_0, y_0) ponton átmenő előírt vagyis $f(x_0, y_0)$ meredekségű egyenest, majd ezt kiértékeljük az x_1 pontban. Így adódik az $\hat{y}(x_1)$-el jelölt x_1-beli közelítő érték. Ezt követően felvesszük az $(x_1, \hat{y}(x_1))$ ponton átmenő előírt vagyis $f(x_1, \hat{y}(x_1))$ meredekségű egyenest és kiértékeljük az x_2-ben. Így adódik $\hat{y}(x_2)$ vagyis az x_2-beli közelítés. Ezt iteratívan folytatjuk addig amíg megkapjuk az $x_m = b$-beli közelítést is.

Euler módszer a matematika nyelvén:

$$\hat{y}(x_1) = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + y_0$$

Ha már meghatároztuk $\hat{y}(x_k)$-t akkor

$$\hat{y}(x_{k+1}) = f(x_k, \hat{y}(x_k))(x_{k+1} - x_k) + \hat{y}(x_k)$$

Kötelező tankönyv fejezetek

A tananyag a Thomas-féle kalkulus második kötetétének BME-s azonosítóval erre a linkre kattintva elérhető (edu.interkonvyv.hu-ra mutató link) következő fejezetei: 7.5 alfejezet (transzcendens függvények, 171-178), 9.1, 9.2, 9.3 alfejezetei az Integrálás további alkalmazásai résznek (nem kell tudni a keverésekhez kötődő differenciálegyenleteket felírását és az Euler módszer fejlesztésének tekinthető Runge-Kutta módszert)!

2. Feladatok (nagyrészt a Thomas-féle kalkulusból)

1. Vázold az $y' = y + 1$ differenciálegyenlet iránymezőjét!

2. Vázold az $y' = x + y$ differenciálegyenlet iránymezőjét!

3. Vázold az $y' = (y + 2)(y - 2)$ differenciálegyenlet iránymezőjét!

4. Közelítsd az $y' = x - y,\ y(0) = 1$ Cauchy probléma megoldását a $[0, 1]$ intervallumon a 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 osztópontokat használva!

5. Használd az Euler-módszert $y(1)$ becslésére 0.2-es részintervallum hosszal, ha $y' = y,\ y(0) = 1$! Mi $y(1)$ pontos értéke?

6. Használd az Euler-módszert $y(2)$ becslésére 0.2-es részintervallum hosszal, ha $y' = \frac{y}{x},\ y(1) = 2$! Mi $y(2)$ pontos értéke?

7. Használd az Euler-módszert $y(2)$ becslésére $\frac{1}{3}$ részintervallum hosszal, ha $y' = y - e^{2x},\ y(0) = 1$! Mi $y(2)$ pontos értéke?

8. Egy 98 Celsius fokos kemény tojást egy nagy tál 18 fokos vízbe tesszük. Ha a tojás hőmérséklete 5 perc alatt 38 Celsius fokra csökken, mennyi időt kell még várnunk, hogy a tojás 20 Celsius fokos-os legyen?

9. A kísérletek tanúsága szerint a radioaktív elemek bomlásának üteme (az idő- egységenként megváltozó atomok száma) a mintában meglévő atomok számával arányos. A radioaktív bomlást tehát a dy/dt = -ky, (k > 0) egyenlet írja le. A radioaktivitás segítségével a Föld régmúltja eseményeinek idejét is meghatározhatjuk. Az élő szervezetekben a 14-es tömegszámú radioaktív szénizotóp és a közönséges (12-es tömegszámú) szénizotóp aránya a szervezet életideje alatt közel állandó (és körülbelül megegyezik a környezet hasonló mutatójával), a szervezet elpusztulása után azonban a 14-es izotópok nem pótlódnak, arányuk ennek megfelelően folyamatosan csökken. A 14-es karbonizotóp felezési ideje 5700 év. Milyen régi az a lelet, amelyben az eredeti szintnél 10% -kal kevesebb 14-es izotóp van?

10. Az óceán felszíne alatt x méter mélységben az $L(x)$ fényerősség kielégíti a

$$\frac{dL}{dx} = -kL$$

differenciálegyenletet. Tapasztalt búvárként tudjuk, hogy a Karib-tengeren 5,5 m mélységben a fényerősség éppen feleakkora, mint a felszínen. Mesterséges világításra van szükségünk akkor, ha a fényerősség a felszíni érték egytizedére csökken. Milyen mélyre merülhetünk búvárlámpa nélkül?

11. Egy alumíniumrudat a hideg udvarról beviszünk a 18 Celsius fokos raktárba; 10 perc elteltével a rúd hőmérséklete 2 Celsius fokosra, további 10 perc múltán pedig 10 fokosra növekszik. Newton törvénye alapján becsüljük meg, hány fokos volt eredetileg a rúd?

12. Egy széndarabban, amely egy, az oregoni Crater-tavat létrehozó vulkánkitörés során elpusztult fából származik, a 14-es szénizotóp mennyisége az élő anyagban lévő mennyiség 44,5%-a. Mikor keletkezett a tó?

13. Egy Vermeernek (1632-1675) tulajdonított festményben az eredeti C14-tartalomnak legföljebb 96,2%-a lehet jelen, ehelyett azonban 99,5%-ot állapítunk meg. Hány éves lehet körülbelül a hamisítvány?

14. * Hallgasd meg figyelmesen a függőhidak láncainak alakjáról szóló oktatói előadást (ide kattintva eléred a kötődő wikipedia oldalt)!