Matematika ÉP2
Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás, 2. feladatsor
2016/17. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Sajátérték, sajátvektor definíciója általában komplex elemű mátrixokra

Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy komplex elemű n-edrendű (négyzetes) mátrix. A komplex λ számot az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre $\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül. A $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \ \{\underline{0}\}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorának hívjuk.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ komplex elemű n-edrendű mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a

$$p(\lambda) := det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinom gyökeit.

A definícióból is látható, hogy a négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai "párban" léteznek. A definícióban lévő egyenletet átrendezve kapjuk, hogy a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\,\underline{v} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezért a lineárisan független sajátvektorokat kell megkeresnünk. Más szóhasználattal a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát keressük.

*Megjegyzés:*A $p(\lambda)$ karakteriszitkus polinom n-edfokú, így az algebra alaptétel miatt (multiplicitással számolva) n sajátértékünk van. *A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak.* Ugyanakkor ha például λ egy 2-szeres sajátérték, akkor hozzá tartozhat 2 lineárisan független sajátvektor, de az is előfordulhat, hogy csak kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá.

Valós elemű mátrixok

A Matematika ÉP1 tárgyban szerepelt, hogy az n-edrendű, valós elemű $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, mely a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tárgyvektorhoz az $\underline{y} = \mathbf{A}\underline{v}$ képvektort rendeli. A gyakorlatban érdekesek azok a vektorok, melyek iránya az adott lineáris transzformáció során nem változik, azaz érdekesek a sajátérték-sajátvektor párok. Fontosak a következő állítások:

- Ha $\mathbf{A}$ valós mátrixnak minden sajátértéke valós, akkor a sajátalterek bázisai felvehetők úgy, hogy minden koordináta valós legyen. Így elég csak a valós sajátvektorokkal foglalkozni.

- Ha $\mathbf{A}$ valós szimmetrikus mátrix ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$), akkor minden sajátértéke valós. (*Ezzel az esettel foglalkozunk a legtöbbet.*)
- Ha $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós szimmetrikus mátrix, akkor $\mathbf{A}$-nak van n számú, páronként ortogonális , lineárisan független sajátvektora. (*Megjegyzés: Ezalapján 3-adrendű mátrixok esetében, ha ismerünk két sajátvektort, akkor a harmadikat már megkaphatjuk ezek vektoriális szorzataként is.*)

Diagonalizálás és hatványozás

A valós elemű n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot **ortonormált**nak nevezzük, ha $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, ahol $\mathbf{I}_n$ az n-edrendű egységmátrix (vagyis az inverzük egyszerűen a transzponáltjuk). Könnyen látszik, hogy $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor ortonormált ha oszlopvektorai egységnyi hosszúak és páronként ortogonálisok (természetesen ugyanez igaz a sorvektorokra is).

Egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha létezik egy olyan n-edrendű invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ szorzatmátrix diagonális legyen.
Egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sajátvektora. Ekkor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ oszlopvektorokkal rendelkező $\mathbf{C}$ mátrixra, valamint a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértékekre igaz a következő egyenlőség:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Megjegyzés: A valós elemű n-edrendű szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix esetében létezik olyan diagonalizáló $\mathbf{C}$ mátrix, amely ortonormált. Azaz ekkor az az egyenlőség áll fenn, hogy $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

*Hatványozás:*A diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra fennálló fenti egyenlőséget $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \cdot \mathbf{C}^{-1}$ formában is felírhatjuk. Indukcióval látható, hogy $(diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))^n = diag\,(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n)$, azaz diagonális mátrix hatványozásánal csak a főátlóban szereplő értékeket kell a megfelelő hatványra emelnünk. Ez lényegesen megkönnyíti egy tetszőleges mátrix hatványozását, hiszen ekkor

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C} \cdot diag\,(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n) \cdot \mathbf{C}^{-1}.$$

2. Feladatok

1. Számítsa ki a következő 2×2-es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

   (a) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (f) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írja fel a következő lienáris transzformációk mátrixát, majd határozza meg a sajátértékeit és sajátvektorait!

   (a) origó körüli $+90°$-os forgatás;

   (b) $x = y$ egyenesre való vetítés;

   (c) x tengelyre való vetítés.

3. Számítsa ki a következő 3×3-as szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Számítsa ki a következő 3×3-as NEM szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

5. Mely mátrixok diagonalizálhatók a fenti feladatokban? Határozza meg azt a $\mathbf{C}$ mátrixot (ha lehet, akkor ortonormált $\mathbf{C}$-t adjon meg), ami diagonalizálja őket, illetve határozza meg az $\mathbf{A}^{10}$ mátrixhatványokat is!