

# Matematika ÉP2

## Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás, 2. gyakorlat

2017/18. őszi félév

### 1. Elméleti összefoglaló

#### Sajátérték, sajátvektor definíciója általában komplex elemű mátrixokra

Legyen  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  egy komplex elemű  $n$ -edrendű (négyzetes) mátrix. A komplex  $\lambda$  számot az  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan  $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  vektor, amelyre  $\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$  teljesül. A  $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  vektort az  $\mathbf{A}$  mátrix  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektorának hívjuk.

Az  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  komplex elemű  $n$ -edrendű mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinom gyökeit.

A definícióból is látható, hogy a négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai "párban" léteznek. A definícióban lévő egyenletet átrendezve kapjuk, hogy a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektorok az

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\underline{v} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezért a lineárisan független sajátvektorokat kell megkeresnünk. Más szóhasználattal a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát keressük.

*Megjegyzés:* A  $p(\lambda)$  karakterisztikus polinom  $n$ -edfokú, így az algebra alaptétel miatt (multiplicitással számolva)  $n$  sajátértékünk van. A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak. Ugyanakkor ha például  $\lambda$  egy 2-szeres sajátérték, akkor hozzá tartozhat 2 lineárisan független sajátvektor, de az is előfordulhat, hogy csak kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá.

#### Valós elemű mátrixok

A Matematika ÉP1 tárgyban szerepelt, hogy az  $n$ -edrendű, valós elemű  $\mathbf{A}$  mátrix az  $\mathbb{R}^n$  vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, mely a  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  tárgyvektorhoz az  $\underline{y} = \mathbf{A}\underline{v}$  képvektort rendeli. A gyakorlatban érdekesek azok a vektorok, melyek iránya az adott lineáris transzformáció során nem változik, azaz érdekesek a sajátérték-sajátvektor párok. Fontosak a következő állítások:

- Ha  $\mathbf{A}$  valós mátrixnak minden sajátértéke valós, akkor a sajátaltér bázisai felvehetőek úgy, hogy minden koordináta valós legyen. Így elég csak a valós sajátvektorokkal foglalkozni.

- Ha  $\mathbf{A}$  valós szimmetrikus mátrix ( $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ), akkor minden sajátértéke valós. (Ezzel az esettel foglalkozunk a legtöbbet.)
- Ha  $\mathbf{A}$  egy  $n$ -edrendű valós szimmetrikus mátrix, akkor  $\mathbf{A}$ -nak van  $n$  számú, páronként ortogonális, lineárisan független sajátvektora. (Megjegyzés: Ez alapján 3-adrendű mátrixok esetében, ha ismerünk két sajátvektort, akkor a harmadikat már megkaphatjuk ezek vektoriális szorzataként is.)

### Diagonalizálás és hatványozás

A valós elemű  $n$ -edrendű  $\mathbf{A}$  mátrixot **ortonormált**nak nevezzük, ha  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ , ahol  $\mathbf{I}_n$  az  $n$ -edrendű egységmátrix (vagyis az inverzük egyszerűen a transzponáltjuk). Könnyen látszik, hogy  $\mathbf{A}$  akkor és csak akkor ortonormált ha oszlopvektorai egységnyi hosszúak és páronként ortogonálisok (természetesen ugyanez igaz a sorvektorokra is).

Egy  $n$ -edrendű  $\mathbf{A}$  mátrix diagonalizálható, ha létezik egy olyan  $n$ -edrendű invertálható  $\mathbf{C}$  mátrix, hogy a  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$  szorzatmátrix diagonális legyen.

Egy  $n$ -edrendű  $\mathbf{A}$  mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van  $n$  lineárisan független  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  sajátvektora. Ekkor a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  oszlopvektorokkal rendelkező  $\mathbf{C}$  mátrixra, valamint a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sajátértékekre igaz a következő egyenlőség:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

*Megjegyzés:* A valós elemű  $n$ -edrendű szimmetrikus  $\mathbf{A}$  mátrix esetében létezik olyan diagonalizáló  $\mathbf{C}$  mátrix, amely ortonormált. Azaz ekkor az az egyenlőség áll fenn, hogy  $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

*Hatványozás:* A diagonalizálható  $\mathbf{A}$  mátrixra fennálló fenti egyenlőséget  $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{C}^{-1}$  formában is felírhatjuk. Indukcióval látható, hogy  $(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n)$ , azaz diagonális mátrix hatványozásánál csak a főátlóban szereplő értékeket kell a megfelelő hatványra emelnünk. Ez lényegesen megkönnyíti egy tetszőleges mátrix hatványozását, hiszen ekkor

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C} \cdot \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n) \cdot \mathbf{C}^{-1}.$$

## 2. Feladatok

1. Számítsa ki a következő  $2 \times 2$ -es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Mely mátrixok diagonalizálhatók? Határozza meg azt a  $\mathbf{C}$  mátrixot (ha lehet, akkor ortonormált  $\mathbf{C}$ -t adjon meg), ami diagonalizálja őket, illetve határozza meg az  $\mathbf{A}^{10}$  mátrixhatványokat is!

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (j) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Számítsa ki a következő  $3 \times 3$ -as szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait majd ortonormált  $C$ -t használva írja fel a  $C^T A C = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  diagonizáló egyenleteteket (a szimmetrikusság miatt minden megadott mátrix ortonormáltan diagonizálható)!

$$(a) \begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (j) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Számítsa ki a következő  $3 \times 3$ -as NEM szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$