

Matematika ÉP2

Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálás,

2024/25 tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Sajátérték, sajátvektor definíciója általában komplex elemű mátrixokra

Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy komplex elemű n -edrendű (négyzetes) mátrix. A komplex λ számot az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ vektor, amelyre $\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül. A $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának hívjuk.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ komplex elemű n -edrendű mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

karakterisztikus polinom gyökeit.

A definícióból is látható, hogy a négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai "párban" léteznek. A definícióban lévő egyenletet átrendezve kapjuk, hogy a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \underline{v} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ezért a lineárisan független sajátvektorokat kell megkeresnünk. Más szóhasználatnál a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát keressük.

Megjegyzés: A $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom n -edfokú, így az algebra alaptétel miatt (multiplicitással számolva) n sajátértékünk van. A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak. Ugyanakkor ha például λ egy 2-szeres sajátérték, akkor hozzá tartozhat 2 lineárisan független sajátvektor, de az is előfordulhat, hogy csak kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá.

Valós elemű mátrixok

A Matematika ÉP1 tárgyban szerepelt, hogy az n -edrendű, valós elemű $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, mely a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tárgyektorhoz az $\underline{y} = \mathbf{A}\underline{v}$ képvektort rendeli. A gyakorlatban érdekesek azok a vektorok, melyek iránya az adott lineáris transzformáció során nem változik, azaz érdekesek a sajátérték-sajátvektor párok. Fontosak a következő állítások:

- Ha $\mathbf{A}$ valós mátrixnak minden sajátértéke valós, akkor a sajátaltér bázisai felvehetők úgy, hogy minden koordináta valós legyen. Így elég csak a valós sajátvektorokkal foglalkozni.

- Ha $\mathbf{A}$ valós szimmetrikus mátrix ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$), akkor minden sajátértéke valós. (Ezzel az esettel foglalkozunk a legtöbbet.)
- Ha $\mathbf{A}$ egy n -edrendű valós szimmetrikus mátrix, akkor $\mathbf{A}$ -nak van n számú, páronként ortogonális, lineárisan független sajátvektora. (Megjegyzés: Ez alapján 3-adrendű mátrixok esetében, ha ismerünk két sajátvektort, akkor a harmadikat már megkaphatjuk ezek vektoriális szorzataként is.)

Diagonalizálás és hatványozás

A valós elemű n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot **ortonormálnak** nevezzük, ha $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, ahol $\mathbf{I}_n$ az n -edrendű egységmátrix (vagyis az inverzük egyszerűen a transzponáltjuk). Könnyen látszik, hogy $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor ortonormált ha oszlopvektorai egységnyi hosszúak és páronként ortogonálisok (természetesen ugyanez igaz a sorvektorokra is).

Egy n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha létezik egy olyan n -edrendű invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ szorzatmátrix diagonális legyen.

Egy n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sajátvektora. Ekkor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ oszlopvektorokkal rendelkező $\mathbf{C}$ mátrixra, valamint a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sajátértékekre igaz a következő egyenlőség:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Megjegyzés: A valós elemű n -edrendű szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix esetében létezik olyan diagonalizáló $\mathbf{C}$ mátrix, amely ortonormált. Azaz ekkor az az egyenlőség áll fenn, hogy $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Hatványozás: A diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra fennálló fenti egyenlőséget $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot \mathbf{C}^{-1}$ formában is felírhatjuk. Indukcióval látható, hogy $(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n)$, azaz diagonális mátrix hatványozásánál csak a főátlóban szereplő értékeket kell a megfelelő hatványra emelnünk. Ez lényegesen megkönnyíti egy tetszőleges mátrix hatványozását, hiszen ekkor

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C} \cdot \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n) \cdot \mathbf{C}^{-1}.$$

2. Feladatok

1. Számítsa ki a következő 2×2 -es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (e) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(f) \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (j) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írja fel a következő lineáris transzformációk mátrixát, majd határozza meg a sajátértékeit és sajátvektorait!

- (a) origó körüli $+90^\circ$ -os forgatás;
- (b) $x = y$ egyenesre való vetítés;
- (c) x tengelyre való vetítés.

3. Számítsa ki a következő 3×3 -as szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$(a) \begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (j) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Számítsa ki a következő 3×3 -as NEM szimmetrikus mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Mely mátrixok diagonalizálhatók a fenti feladatokban? Határozza meg azt a $\mathbf{C}$ mátrixot (ha lehet, akkor ortonormált $\mathbf{C}$ -t adjon meg), ami diagonalizálja őket, illetve határozza meg az $\mathbf{A}^{10}$ mátrixhatványokat is!