

# Matematika ÉP2

## Kétváltozós függvények deriválása, 6. gyakorlat

### 2013/14. tavaszi félév

## 1. Elméleti összefoglaló

### Kétváltozós függvények geometriai interpretációja

Legyen  $D$  egy  $xy$ -síkbeli tartomány,  $f$  pedig egy  $D$ -n értelmezett, valós értékű függvény, mely tetszőleges  $D$ -beli  $(x, y)$  pontnak egy  $z = f(x, y)$  értéket feleltet meg. Az  $(x, y, f(x, y))$  pontok által meghatározott alakzat a háromdimenziós Descartes-koordinátarendszerben a függvény geometriai megfelelője, ezt a függvény *grafikonjának* nevezzük. A grafikont  $z = f(x, y)$  felületnek is nevezzük. A felületről akkor kapunk pontosabb képet, ha megvizsgáljuk a szintvonalait és a koordináta síkokkal való metszetgörbéit. Az  $xy$ -sík azon pontjainak összességét, melyekben az  $f$  függvény ugyanazt a  $c$  konstans értéket veszi fel, azaz  $f(x, y) = c$ , az  $f$  függvény *szintvonalának* nevezzük.

Tekintsük át a **nevezetes felületeket!**

- *Forgásparaboloid* egyenlete (a legegyszerűbb alakban):  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Ennek a szintvonalai koncentrikus körök, az  $yz$  és  $xz$ -koordináta síkokkal való metszetei parabolák.
- *Hiperbolikus paraboloid vagy nyeregfelület* egyenlete (a legegyszerűbb alakban):  $f(x, y) = y^2 - x^2$ . Ennek a szintvonalai hiperbolák, az  $yz$ - síkkal való metszete a  $z = y^2$  konvex parabola, míg az  $xz$ -síkkal való metszete a  $z = -x^2$  konvex parabola.
- $R$ -sugarú *félgömb* egyenlete:  $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ .
- *Forgáskúp* egyenlete:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Az  $y$ -tengelyű,  $R$ -sugarú *félhenger* egyenlete:  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ .
- Az *egyköpenyű forgáshiperboloid* egyenlete:  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ .
- A *kétköpenyű forgáshiperboloid* egyenlete:  $z - x^2 - y^2 = 1$ .

### Kétváltozós függvények határértéke és folytonossága

A *határérték* definíciója:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

akkor és csak akkor, ha minden  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  pontsorozatra fennáll, hogy  $f(x_n, y_n) \rightarrow A$ . *Megjegyzés: az egyváltozós függvények esetén tanult határértékműveletek ebben az esetben is igazak.*

A  $z = f(x, y)$  kétváltozós függvény *folytonos* az értelmezési tartomány  $(x_0, y_0)$  pontjában, ha létezik a határérték ebben a pontban és ez egyenlő a függvény ebben a pontban felvett helyettesítési értékével, azaz

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Egy függvény folytonos, ha folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.

### Parciális derivált, gradiens, iránymenti derivált, érintő sík

Egy  $f(x,y)$  függvényt igen könnyű az egyes változói szerint deriválni, mert ilyenkor a másik változót rögzítettnek képzeljük, és csak a szóban forgó változó egyváltozós függvényének tekintjük a függvényt.

Az  $f(x,y)$  függvény  $(x_0,y_0)$  pontbeli,  $x$  változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Hasonlóan az  $f(x,y)$  függvény  $(x_0,y_0)$  pontbeli,  $y$  változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Az  $f(x,y)$  függvény  $(x_0,y_0)$  pontbeli,  $x$ -szerinti parciális deriváltjának geometriai jelentése nem más, mint a  $z = f(x,y)$  felület és az  $y = y_0$  egyenletű sík metszészvonala érintőjének meredeksége az  $(x_0,y_0)$  pontban. (Hasonlóan értelmezhető az  $y$ -szerinti derivált is.)

Parciális deriváltakkal könnyű felírni a  $z = f(x,y)$  felület  $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$  pontjában az *érintő sík* egyenletét:

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

A parciális deriváltakból álló vektort *gradiens vektornak* nevezzük.

$$\nabla f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y))$$

A gradiens vektor a függvény minden egyes pontjában megadja a legnagyobb meredekség irányát (azaz a gradiens vektor a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat). Lokális minimumban, lokális maximumban vagy egy nyeregponthoz a gradiens nulla.

A gradiens vektornak egy tetszőleges irányú  $\underline{v}$  egységvektorral való skalárszorzatát

$$f'_{\underline{v}}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

az  $f(x,y)$  függvény  $\underline{v}$  irányban vett *iránymenti deriváltjának* nevezzük. Amennyiben az irány  $\alpha$  szöggel van megadva, úgy az irányt megadó  $\underline{v}$  vektor:  $\underline{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ .

*Megjegyzés:* a magasabbrendű parciális deriváltak jelölése és jelentése is teljesen hasonló az elsőrendű deriváltakhoz. Azaz például

$$f'_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y).$$

*Young-tétele* szerint ha  $f(x,y)$  és parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy nyílt tartományon, ami tartalmazza  $(x_0,y_0)$ -t, akkor  $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$  teljesül.

## 2. Feladatok

1. Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát, elsőrendű parciális deriváltjait és azok értelmezési tartományát!

(a)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$     (b)  $f(x, y) = x^y$

(c)  $f(x, y) = y^2 \ln \sqrt{xy}$     (d)  $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

(e)  $f(x, y) = \frac{x^3 e^y}{1 + \sin x + y^2}$     (f)  $f(x, y) = \frac{e^{2x-3y}}{2x-3y}$

(g)  $f(x, y) = x \operatorname{tg}(x+y)$     (h)  $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$

(i)  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$     (j)  $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2 - 6x + 7y + 8$

(k)  $f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$     (l)  $f(x, y) = \sqrt{x^3 - 5x^2 y + y^4}$

(m)  $f(x, y) = e^{x^2 \sin x - y^2 x^3}$

2. Határozza meg a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait! Ellenőrizze le, hogy valóban teljesül az  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  egyenlőség!

(a)  $f(x, y) = \ln(x + e^y)$     (b)  $f(x, y) = x^y$     (c)  $f(x, y) = x \operatorname{tg}(x+y)$

(d)  $f(x, y) = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)$     (e)  $f(x, y) = \frac{y^2}{x+y}$     (f)  $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(g)  $f(x, y) = y - xe^y + x$     (h)  $f(x, y) = e^{xy}$     (i)  $f(x, y) = x \sin(x+y) + y \sin(x+y)$

3. Írja fel az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

(a)  $f(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2 + 5x - 6$  és  $P_0(1, -1)$

(b)  $f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$  és  $P_0(1, 2)$

(c)  $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$  és  $P_0(1, 2)$

(d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(xy)$  és  $P_0(2, 1/2)$

(e)  $f(x, y) = x \operatorname{tgy} - y \operatorname{tg}x$  és  $P_0(\pi/4, 0)$

(f)  $f(x, y) = 3y + e^{xy^2} + 2y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$  és  $P_0(0, 1)$

(g)  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$  és  $P_0(1, 1)$

4. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a  $P(2, -1, 3)$  ponton és párhuzamos az  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$  felület  $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ,  $y_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  koordinátájú pontjához tartozó érintősíkkal.
5. Az  $f(x, y) = \ln(xy)$  felületnek mely pontjaiban párhuzamosak az érintősíkok az  $x + y + z = 0$  síkkal?
6. Az  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 5x + 3y - 5$  felület mely pontjaiban vízszintes az érintősík?
7. Határozza meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!
- (a)  $f(x, y) = x^3 - 5xy^2 - 2x + 1$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $P_0(1, 0)$
- (b)  $f(x, y) = (x - y)^2$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $P_0(2, 3)$
- (c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\alpha = 135^\circ$ ,  $P_0(-5, 5)$
- (d)  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $\alpha = 150^\circ$ ,  $P_0(1, 0)$
- (e)  $f(x, y) = \frac{x^2 \ln y}{x^2 + 3y^2}$ ,  $\underline{v} = (-3, 4)$ ,  $P_0(-1, 1)$
- (f)  $f(x, y) = \frac{xy(1 + y)}{x^2 + y^2}$ ,  $\underline{v} = (-4, 3)$ ,  $P_0(3, 1)$
- (g)  $f(x, y) = x^4[2 - \ln(1 + y^2)]$ ,  $\underline{v} = (1, 3)$ ,  $P_0(1, 0)$
- (h)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $\underline{v} = (1, 3)$ ,  $P_0(-3, -4)$
8. Határozza meg mely irány esetén lesz nulla az  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$  függvény  $P_0(2, 0)$  pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?
9. Milyen irányban lesz az  $f(x, y) = y^3 e^{-2x-1}$  függvény  $(\frac{1}{2}, 1)$  pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?
10. Határozza meg az  $f(x, y) = x^2 e^y$  függvény  $P_0(2, 0)$  pontbeli, a  $\underline{v} = (3, 4)$  vektorra merőleges iránymenti deriváltját!