Matematika ÉP2
Kétváltozós függvények deriválása, 7. feladatsor
2022/23. őszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Iránymenti derivált

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli gradiens vektorának nevezzük az adott pontbeli parciális deriváltakból álló vektort:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right)$$

A parciális deriváltakhoz hasonlóan határértékkel definiálható a függvény (x_0, y_0) pontbeli tetszőleges $\underline{v}$ irányú iránymenti deriváltja. Ez a $\underline{v}$ irányú egységvektor és a gradiens vektor skalárszorzataként számolható:

$$f'_{\underline{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

A képletről leolvasható, hogy az iránymenti derivált a gradiens irányában a legnagyobb és a gradienssel ellentétes irányban a legkisebb.

Lokális szélsőértékek

Legyen f függvény egy olyan tartományon definiálva, melynek (x_0, y_0) belső pontja. (x_0, y_0) lokális maximum/ minimum hely, ha van olyan (x_0, y_0) középpontú nyílt körlap, melyben minden értelmezési tartomány beli pont függvényértéke kisebb vagy egyenlő/ nagyobb vagy egyenlő $f(x_0, y_0)$-nál. A továbbiakban feltételezzük, hogy f értelmezési tartománya egy nyílt T halmaz és f elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a T nyílt halmazon, aminek eleme (x_0, y_0).

*Kritikus pont*nak nevezzük a T értelmezési tartomány azon pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla.

*Nyeregpont*nak nevezzük a T értelmezési tartomány azon (x_0, y_0) pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla és minden (x_0, y_0) középpontú nyílt körlapon van olyan pontja az értelmezési tartománynak, melynek függvényértéke kisebb az $f(x_0, y_0)$ értéknél, és van olyan is, melynek nagyobb.

Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: Ha (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van f-nek, akkor itt $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele: Ha $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$ és f második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az (x_0, y_0)-t tartalmazó nyílt T halmazon, akkor

1. Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban lokális minimuma van és ez a minimum érték $f(x_0, y_0)$.

2. Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban lokális maximuma van és ez a maximum érték $f(x_0, y_0)$.

3. Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} < 0$, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban nyeregpontja van.

***Abszolút szélsőértékek**

Ha a folytonos $f(x, y)$ korlátos és zárt halmazon értelmezett, akkor ott felveszi a maximumát és minimumát. Ezen most *abszolút maximumot*, vagy *abszolút minimumot* értünk. Az abszolút szélsőérték megkeresésének menete a következő:

- A tartomány belsejében megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket.
- A tartomány határán megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket.
- Kiszámoljuk az előzőekre a függvényértékeket és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat és a legkisebbet.

***Feltételes szélsőértékek**

Adott feltételek melletti lokális szélsőértékek, azaz a *feltételes lokális szélsőértékek* kiszámításának fontos eszköze a Lagrange-multiplikátoros módszer. Ha az $f(x, y)$-t szeretnénk minimalizálni vagy maximalizálni egy $g(x, y) = 0$ feltétel mellett (feltesszük, hogy f és g parciális deriváltjai léteznek és folytonosak), akkor ezt megtehetjük a

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

segédfüggvény segítségével (λ a Lagrange multiplikátor). Az eredeti probléma lokális feltételes szélsőértékeit a segédfüggvény kritikus pontjai között kell keresni.

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 \ln y}{x^2 + 3y^2}, \quad \underline{v} = (-3, 4), \quad P_0(-1, 1)$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{xy(1 + y)}{x^2 + y^2}, \quad \underline{v} = (-4, 3), \quad P_0(3, 1)$

   (c) $f(x, y) = x^4[2 - \ln(1 + y^2)], \quad \underline{v} = (1, 3), \quad P_0(1, 0)$

   (d) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right), \quad \underline{v} = (1, 3), \quad P_0(-3, -4)$

2. Határozza meg mely irány esetén lesz nulla az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + e^y$ függvény $P_0(2, 0)$ pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?

3. Milyen irányban lesz az $f(x, y) = y^3 e^{-2x-1}$ függvény $(\frac{1}{2}, 1)$ pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?

4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, akkor minimum vagy maximum!

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - y + 5$

   (c) $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ (d) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

   (e) $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$ (f)$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

   (g) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ (h) $f(x,y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$

   (i) $f(x,y) = xy(x + 8)(y - 6)$ (j) $f(x,y) = (x^3 - 9)(y^2 + 4y)$

   (k) $f(x,y) = x^3y^2(4 - x - y)$ (l) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + 3xy + \frac{y^3}{3} + \frac{5y^2}{2} - 5x - 12y + 2$

   (*m) $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$ (*n) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$

5. Ossza fel a 12-t három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!

6. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege $45\ cm$. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

7. Téglatest alakú, felül nyitott $4\ m^3$ térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Mekkorák legyenek a téglatest élei?

8. Ossza fel a 18-at három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második rész köbének és a harmadik résznek a szorzata maximális legyen!

9. Mikor a legnagyobb a 400 méter kerületű szimmetrikus trapéz alakú telek területe? (Mekkorák a szárai és a hosszabbik alapon fekvő szögei?)

*10 Határozza meg az $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0$, $y = 0$ és $x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt tartományban!

*11 Mekkorák a méretei az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel?

*12 Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x,y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!