Kétváltozós függvények integrálszámítása (és egy kis kiegészítés)

1. Elméleti összefoglaló

***Abszolút szélsőértékek**

Ha a folytonos $f(x, y)$ korlátos és zárt halmazon értelmezett, akkor ott felveszi a maximumát és minimumát. Ezen most *abszolút maximumot*, vagy *abszolút minimumot* értünk. Az abszolút szélsőérték megkeresésének menete a következő:

- A tartomány belsejében megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket.
- A tartomány határán megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket.
- Kiszámoljuk az előzőekre a függvényértékeket és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat és a legkisebbet.

***Feltételes szélsőértékek**

Adott feltételek melletti lokális szélsőértékek, azaz a *feltételes lokális szélsőértékek* kiszámításának fontos eszköze a Lagrange-multiplikátoros módszer. Ha az $f(x, y)$-t szeretnénk minimalizálni vagy maximalizálni egy $g(x, y) = 0$ feltétel mellett (feltesszük, hogy f és g parciális deriváltjai léteznek és folytonosak), akkor ezt megtehetjük a

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

segédfüggvény segítségével (λ a Lagrange multiplikátor). Az eredeti probléma lokális feltételes szélsőértékeit a segédfüggvény kritikus pontjai között kell keresni.

Kétváltozós függvények integrálszámítása

Az egyváltozós függvények Riemann-összege általánosítható kétváltozós esetre is. Ekkor egy az xy síkban fekvő T tartományt téglalapokra osztunk fel, és ezekhez tartozó "téglatestekkel" közelítjük a T tartomány és a $z = f(x, y)$ függvény közé eső térfogatrészt. Be lehet látni, hogy akárcsak az egyváltozós esetben, ha az $f(x, y)$ függvény folytonos a korlátos és zárt T tartományon, akkor ott integrálható is. Tetszőleges tartományra igaz, hogy amennyiben létezik a kettős integrál a T tartományon, akkor az előjeles térfogatot jelent. Azaz amennyiben $f(x, y)$ grafikonja az xy-sík felett helyezkedik el, akkor a kettős integrál értéke nem más, mint azon T fölötti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet alulról az xy-sík felülről pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $f(x, y)$ grafikonja az xy-sík alatt helyezkedik el, akkor a $\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A$ nem más, mint azon T alatti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet felülről az xy-sík alulról pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A = 0$, akkor ez azt jelenti, hogy ugyanannyi térfogatrészünk van az xy-sík felett, mint alatta. Emellett természetesen a kettős integrálokra is általánosíthatóak az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál tanult tulajdonságok.

Kettős integrál téglalap tartományon

Fubini tétel: Ha $f(x, y)$ folytonos a $T = [a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap tartományon, akkor

$$\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Kettős integrál normál tartományon

x-szerinti normál tartomány: A $T_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \text{ és } c(x) \leq y \leq d(x)\}$, röviden az $a \leq x \leq b$ és $c(x) \leq y \leq d(x)$ tartományt x-szerinti normál tartománynak nevezzük.

y-szerinti normál tartomány: A $T_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\}$, röviden az $c \leq y \leq d$ és $a(y) \leq x \leq b(y)$ tartományt y-szerinti normál tartománynak nevezzük.

Fubini tétel, erősebb alak: Legyen $f(x, y)$ folytonos függvény a T tartományon

1. Ha $T = \{a \leq x \leq b \text{ és } c(x) \leq y \leq d(x)\}$ x-szerinti normál tartomány, ahol $c(x)$ és $d(x)$ folytonos függvények, akkor

$$\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

2. Ha $T = \{c \leq y \leq d \text{ és } a(y) \leq x \leq b(y)\}$ x-szerinti normál tartomány, ahol $a(y)$ és $b(y)$ folytonos függvények, akkor

$$\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

3. Ha T mindkét tengelyre nézve normál tartomány, akkor a két integrál egyenlő.

Kettős integrál egyéb tartományon

Integráltranszformáció: Legyen $f(x,y)$ egy kétváltozós függvény T pedig egy síkbeli tartomány. Tegyük fel, hogy az $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ függvények kölcsönösen egyértlemű módon képzik le a G tartományt a T tartományra. Tegyük fel azt is, hogy az $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ és $\frac{\partial y}{\partial v}$ parciális deriváltak léteznek és folytonosak, valamint a

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobi determináns csak izolált pontokban vagy éppen sehol sem 0. Ekkor

$$\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_G f(x(u,v),(y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ennek alkalmazása a polárkoordinátás transzformáció, amit akkor érdemes használni, ha a tartományunk körlap, körcikk, körgyűrű, vagy ezek valamilyen részhalmaza. Itt az xy-síkról az $r\varphi$-síkra történik a transzformáció, ahol r jelöli az (x,y) pont origótól vett távolságát, φ pedig a pont helyvektorának az x-tengely pozitív irányával bezárt szögét. Azaz

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi \quad \text{és} \quad y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

helyettesítést használva a Jacobi-determináns:

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

azaz

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Kettős integrál alkalmazásai

Egy T korlátos zárt síktartomány *területe* (ha az integrál létezik és véges):

$$Ter = \int\int_T \mathrm{d}A.$$

Ha egy vékony, T tartományt borító fémlemez tömegeloszlásáról feltesszük, hogy folytonos, $\delta(x,y)$-nal jelöljük a fémlemez anyagának sűrűségfüggvényét (az egységnyi területen lévő tömeget), akkor a fémlemez tömege, az x-, valamint y-tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai és tömegközéppontjának koordinátái a következő képletekkel számolható ki (ha az integrálok léteznek és végesek):
tömeg:

$$M = \int\int_T \delta(x,y)\mathrm{d}A;$$

forgatónyomatékok:

$$M_x = \int\int_T y\delta(x,y)\mathrm{d}A;$$
$$M_y = \int\int_T x\delta(x,y)\mathrm{d}A;$$

ezek segítségével a tömegközéppont koordinátái:

$$\overline{x} = \tfrac{M_y}{M} \quad \text{és} \quad \overline{y} = \tfrac{M_x}{M}.$$

2. Feladatok

*1 Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x, y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x, y) = x^2+2y^2-x$ lesz. Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!

2. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott téglalap tartományokon!

   (a) $\int\int_T (12x - 6y - 5)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 2 \text{ és } -3 \leq y \leq 3\}$;

   (b) $\int\int_T \sin(x + y)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ és } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$;

   (c) $\int\int_T (x^2 + 4y)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

   (d) $\int\int_T e^{3x+4y}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \ln 2 \text{ és } 0 \leq y \leq \ln 3\}$;

   (e) $\int\int_T xye^{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$;

   (f) $\int\int_T xy\sin(x^2 + y^2)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ és } 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$;

3. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott normál tartományokon!

   (a) $\int\int_T 2xy\mathrm{d}A =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész;

   (b) $\int\int_T y\sin x\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq x \leq y \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$ háromszög;

   (c) $\int\int_T (x^2 + y)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \text{ és } 0 \leq y \leq 1\}$

   (d) $\int\int_T x\,\mathrm{d}A =$, ahol T az $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 1)$ és $D(4, 0)$ csúcspontú trapéz;

   (e) $\int\int_T (x^2 + 2y)\mathrm{d}A =$, ahol T az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ és $C(3, 0)$ csúcspontú háromszög;

   (f) $\int\int_T xe^y\mathrm{d}A =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = x$ görbék által határolt korlátos síkrész;

   (g) $\int\int_T (1 - y)\mathrm{d}A =$, ahol T az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ görbék által határolt korlátos síkrész;

   (h) $\int\int_T (x^2 + y^2)\mathrm{d}A =$, ahol T az $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ és $C(0, 2)$ csúcspontú háromszög;

4. Határozza meg a $\int_T \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}A =$ kettős integrált, ahol T az $A(0, 0)$, $B(0, 1)$ és $C(2, 1)$ csúcspontú háromszög! (Segítség: a sikeres integráláshoz elengedheteten, hogy a külső integrál legyen az y szerinti)

5. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott egyéb tartományokon! (*Segítség:* Végezzen polárkoordinátás helyettesítést!)

   (a) $\int\int_T 2x - 6y + 3\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú 2 sugarú körlap;

   (b) $\int\int_T \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$;

   (c) $\int\int_T \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \;\; x \leq 0 \;\; 0 \leq y\}$;

   (d) $\int\int_T (x^2 - y^2)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq r \leq 1 \;\text{ és }\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$ körcikk;

   (e) $\int\int_T \sqrt{100 - x^2 - y^2}\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú 5 sugarú kör;

   (f) $\int\int_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú, egységsugarú kör pozitív síknegyedbe eső része;

   (g) $\int\int_T \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol T az origó körüli 1 és 2 sugarú körök közé eső körgyűrű első síknegyedbeli része;

   (h) $\int\int_T xy^2\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú, R sugarú kör első síknegyedbe eső része

6. Határozza meg az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész területét!

7. Adja meg számolás nélkül a $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \; \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ integrál értékét!

8. Határozza meg a $z = 25 - x^2 - y^2$ egyenletű felület és a $z \geq 0$ féltér általa határolt korlátos térrész térfogatát!

9. Határozza meg a $T = \{x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0\}$ félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

10. Határozza meg a homogén lemezből kivágott R sugarú negyedkörlap tömegközéppontját!