Kétváltozós függvények integrálszámítása

1. Elméleti összefoglaló

Kétváltozós függvények integrálszámítása

Az egyváltozós függvények Riemann-összege általánosítható kétváltozós esetre is. Ekkor egy az xy síkban fekvő T tartományt téglalapokra osztunk fel, és ezekhez tartozó "téglatestekkel" közelítjük a T tartomány és a $z = f(x, y)$ függvény közé eső térfogatrészt. Be lehet látni, hogy akárcsak az egyváltozós esetben, ha az $f(x, y)$ függvény folytonos a korlátos és zárt T tartományon, akkor ott integrálható is. Tetszőleges tartományra igaz, hogy amennyiben létezik a kettős integrál a T tartományon, akkor az előjeles térfogatot jelent. Azaz amennyiben $f(x, y)$ grafikonja az xy-sík felett helyezkedik el, akkor a kettős integrál értéke nem más, mint azon T fölötti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet alulról az xy-sík felülről pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $f(x, y)$ grafikonja az xy-sík alatt helyezkedik el, akkor a $\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A$ nem más, mint azon T alatti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet felülről az xy-sík alulról pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A = 0$, akkor ez azt jelenti, hogy ugyanannyi térfogatrészünk van az xy-sík felett, mint alatta. Emellett természetesen a kettős integrálokra is általánosíthatóak az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál tanult tulajdonságok.

Kettős integrál téglalap tartományon

Fubini tétel: Ha $f(x, y)$ folytonos a $T = [a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap tartományon, akkor

$$\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Kettős integrál normál tartományon

x-szerinti normál tartomány: A $T_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b \text{ és } c(x) \le y \le d(x)\}$, röviden az $a \le x \le b$ és $c(x) \le y \le d(x)$ tartományt x-szerinti normál tartománynak nevezzük.

y-szerinti normál tartomány: A $T_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \le y \le d \text{ és } a(y) \le x \le b(y)\}$, röviden az $c \le y \le d$ és $a(y) \le x \le b(y)$ tartományt y-szerinti normál tartománynak nevezzük.

Fubini tétel, erősebb alak: Legyen $f(x, y)$ folytonos függvény a T tartományon

1. Ha $T = \{a \le x \le b \text{ és } c(x) \le y \le d(x)\}$ x-szerinti normál tartomány, ahol $c(x)$ és $d(x)$ folytonos függvények, akkor
$$\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
2. Ha $T = \{c \le y \le d \text{ és } a(y) \le x \le b(y)\}$ x-szerinti normál tartomány, ahol $a(y)$ és $b(y)$ folytonos függvények, akkor
$$\int\int_T f(x, y)\mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$
3. Ha T mindkét tengelyre nézve normál tartomány, akkor a két integrál egyenlő.

Kettős integrál egyéb tartományon

Integráltranszformáció: Ha az xy-síkon minden (x, y) koordinátájú ponthoz hozzárendelünk egy $(x(u, v), (y(u, v))$ pontot az uv-síkból, azaz $f(x, y) = f(x(u, v), (y(u, v))$, és az xy-síkbeli T tartomány uv-síkbeli megfelelőjét G tartományként jelöljük, továbbá ha a $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ és $\frac{\partial y}{\partial v}$ parciális deriváltak léteznek és folytonosak, valamint a

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobi determináns csak izolált pontokban vagy éppen sehol sem 0, akkor

$$\int\int_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_G f(x(u,v),(y(u,v))\cdot|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Ennek alkalmazása a polárkoordinátás transzformáció, amit akkor érdemes használni, ha a tartományunk körlap, körcikk, körgyűrű, vagy ezek valamilyen részhalmaza. Itt az xy-síkról az $r\varphi$-síkra történik a transzformáció, ahol r jelöli az (x,y) pont origótól vett távolságát, φ pedig a pont helyvektorának az x-tengely pozitív irányával bezárt szögét. Azaz

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi \quad \text{és} \quad y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

helyettesítést használva a Jacobi-determináns:

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

azaz

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Kettős integrál alkalmazásai

Egy T korlátos zárt síktartomány *területe* (ha az integrál létezik és véges):

$$Ter = \int\int_T \mathrm{d}A.$$

Ha egy vékony, T tartományt borító fémlemez tömegeloszlásáról feltesszük, hogy folytonos, $\delta(x,y)$-nal jelöljük a fémlemez anyagának sűrűségfüggvényét (az egységnyi területen lévő tömeget), akkor a fémlemez tömege, az x-, valamint y-tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai és tömegközéppontjának koordinátái a következő képletekkel számolható ki (ha az integrálok léteznek és végesek):
tömeg:

$$M = \int\int_T \delta(x,y)\mathrm{d}A;$$

forgatónyomatékok:

$$M_x = \int\int_T y\delta(x,y)\mathrm{d}A;$$
$$M_y = \int\int_T x\delta(x,y)\mathrm{d}A;$$

ezek segítségével a tömegközéppont koordinátái:

$$\overline{x} = \tfrac{M_y}{M} \quad \text{és} \quad \overline{y} = \tfrac{M_x}{M}.$$

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott téglalap tartományokon!

   (a) $\int\int_T (12x - 6y - 5)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le 2 \;\text{ és }\; -3 \le y \le 3\}$;

   (b) $\int\int_T \sin(x + y)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le \frac{\pi}{2} \;\text{ és }\; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$;

   (c) $\int\int_T (x^2 + 4y)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le 1 \;\text{ és }\; 0 \le y \le 1\}$;

   (d) $\int\int_T e^{3x+4y}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le \ln 2 \;\text{ és }\; 0 \le y \le \ln 3\}$;

   (e) $\int\int_T xye^{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le 1 \;\text{ és }\; 0 \le y \le 1\}$;

   (f) $\int\int_T xy\sin(x^2 + y^2)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \;\text{ és }\; 0 \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$;

2. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott normál tartományokon!

   (a) $\int\int_T 2xy\mathrm{d}A =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész;

   (b) $\int\int_T y\sin x\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \le x \le y \;\text{ és }\; 0 \le y \le 1\}$ háromszög;

   (c) $\int\int_T (x^2 + y)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{y^2 \le x \le \sqrt{y} \;\text{ és }\; 0 \le y \le 1\}$

   (d) $\int\int_T x\,\mathrm{d}A =$, ahol T az $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$ és $D(4,0)$ csúcspontú trapéz;

   (e) $\int\int_T (x^2 + 2y)\mathrm{d}A =$, ahol T az $A(1,1)$, $B(0,3)$ és $C(3,0)$ csúcspontú háromszög;

   (f) $\int\int_T xe^y\mathrm{d}A =$, ahol T az $y = x^2$ és $y = x$ görbék által határolt korlátos síkrész;

   (g) $\int\int_T (1 - y)\mathrm{d}A =$, ahol T az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ görbék által határolt korlátos síkrész;

   (h) $\int\int_T (x^2 + y^2)\mathrm{d}A =$, ahol T az $A(0,0)$, $B(3,0)$ és $C(0,2)$ csúcspontú háromszög;

3. Határozza meg a $\int_T \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}A =$ kettős integrált, ahol T az $A(0,0)$, $B(0,1)$ és $C(2,1)$ csúcspontú háromszög! (Segítség: a sikeres integráláshoz elengedheteten, hogy a külső integrál legyen az y szerinti)

4. Határozza meg a következő kettős integrálok értékét a megadott egyéb tartományokon! (*Segítség:* Végezzen polárkoordinátás helyettesítést!)

   (a) $\int\int_T 2x - 6y + 3\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú 2 sugarú körlap;

   (b) $\int\int_T \frac{2xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$;

   (c) $\int\int_T \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \ x \leq 0\ \ 0 \leq y\}$;

   (d) $\int\int_T (x^2 - y^2)\mathrm{d}A =$, ahol $T = \{0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$ körcikk;

   (e) $\int\int_T \sqrt{100 - x^2 - y^2}\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú 5 sugarú kör;

   (f) $\int\int_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú, egységsugarú kör pozitív síknegyedbe eső része;

   (g) $\int\int_T \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$, ahol T az origó körüli 1 és 2 sugarú körök közé eső körgyűrű első síknegyedbeli része;

   (h) $\int\int_T xy^2\mathrm{d}A =$, ahol T az origó középpontú, R sugarú kör első síknegyedbe eső része

5. Határozza meg az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt korlátos síkrész területét!

6. Adja meg számolás nélkül a $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ integrál értékét!

7. Határozza meg a $z = 25 - x^2 - y^2$ egyenletű felület és a $z \geq 0$ féltér általa határolt korlátos térrész térfogatát!

8. Határozza meg a $T = \{x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0\}$ félkör alakú tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

9. Határozza meg a homogén lemezből kivágott R sugarú negyedkörlap tömegközéppontját!