

# Matematika ÉP2

## Felületek, 8. feladatsor

### 2021/22. őszi félév

## 1. Elméleti összefoglaló

### Fogalmak

A felületeket két skalárparamétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Szokásos módon rögzítjük tehát az origóból kiinduló  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$  páronként merőleges egységvektorokat. Ekkor egy az origóból kiinduló térbeli vektort a következőképpen adhatunk meg:

$$\underline{r}(u, v) = x(u, v)\underline{i} + y(u, v)\underline{j} + z(u, v)\underline{k},$$

vagy

$$\underline{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)].$$

A következőkben - a görbékhez hasonlóan - feltesszük, hogy az  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  és  $z(u, v)$  kétváltozós függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, például elég sokszor differenciálhatóak.

Ha a  $v$  paramétert rögzítjük ( $v = v_0$ ) és csak az  $u$  paramétert változtatjuk, akkor az

$$\underline{r}(u, v_0) = [x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)]$$

függvény egy felületi görbét ír le. Különböző rögzített  $v$  értékek esetén egy felületi görbesereget kapunk. Hasonlóan az  $u$  paraméter rögzített értékeihez egy másik görbesereg tartozik. Úgy is elképzelhetjük a felület ilyen típusú megadását, mintha a felületen futó görbék hálózatával jellemeznénk a felületet.

### Felületi normális, érintősík

Az  $\underline{r}(u, v_0) = [x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)]$  görbe tetszőleges  $u$  paraméterű pontjában az érintővektor az  $u$  szerinti derivált, azaz

$$\underline{r}_u(u, v_0) = [x_u(u, v_0), y_u(u, v_0), z_u(u, v_0)].$$

Ez a vektor érintő a felülethez is. Hasonlóan az  $\underline{r}(u_0, v) = [x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)]$  görbe tetszőleges  $v$  paraméterű pontjában az érintővektor a  $v$  szerinti derivált, azaz

$$\underline{r}_v(u_0, v) = [x_v(u_0, v), y_v(u_0, v), z_v(u_0, v)].$$

Ez a vektor szintén érintő a felülethez is.

A *felületi normális* mindkét érintővektorra merőleges, tehát előállítható a következő alakban:

$$\underline{n} = \underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v).$$

Amennyiben bevezetjük a *Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeket*

$$E = (\underline{r}_u)^2 \quad F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v \quad G = (\underline{r}_v)^2,$$

akkor a felületi normális hossza a következő képlettel számolható:

$$|\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Az  $\underline{n}$  felületi normális segítségével felírhatjuk a felület tetszőleges  $u_0, v_0$  paraméterű pontjában az *érintősík egyenletét*:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0,$$

ahol  $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$  és  $\underline{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ .

### Felületdarab felszíne

Ha az  $u, v$  paramétersíkon kijelölünk egy  $T$  tartományt, akkor ez meghatározza az  $\underline{r}(u, v)$  felület egy darabját. Ezen felületdarab felszíne az alábbi kettősintegrállal számolható ki:

$$\mathcal{F} = \int \int_T |\underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)| du dv = \int \int_T \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

### Felületi pontok osztályozása

Képzeld el, hogy a felület valamely pontjában az érintősíkot egy picit elmozdítjuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy belemetszen a felületbe. a kapott metszetgörbének vegyük a másodrendű közelítését. A másodrendű görbe lehet ellipszis, hiperbola vagy parabola. Ennek megfelelően a felületi pont lehet elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus. A felületi pont jellegének kiszámítása a következőképpen történik. Először is bevezetjük a *Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket*:

$$L = \underline{r}_{uu} \cdot \underline{n}^0 \quad M = \underline{r}_{uv} \cdot \underline{n}^0 \quad N = \underline{r}_{vv} \cdot \underline{n}^0,$$

ahol  $\underline{n}^0$  jelöli az egységnyi hosszú felületi normálist. Ekkor

1. ha  $LN - M^2 > 0$ , akkor a felületi pont elliptikus,
2. ha  $LN - M^2 < 0$ , akkor a felületi pont hiperbolikus,
3. ha  $LN - M^2 = 0$ , akkor a felületi pont parabolikus.

*Megjegyzés:* Ha a felület  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in T$  alakban adott, akkor az  $LN - M^2$  kifejezés előjele megegyezik az

$$f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2$$

kifejezés előjelével.

## 2. Feladatok

1. Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott  $\underline{\rho}(u)$  görbe és alkotójának iránya az  $\underline{a}$  vektor! (*Segítség:* A henger általános egyenlete:  $\underline{r}(u, v) = \underline{\rho}(u) + v\underline{a}$ .)

(a)  $\underline{\rho}(u) = 2 \cos u \underline{j} + 3 \sin u \underline{k}$ ,  $\underline{a} = \underline{i}$

(b)  $\underline{\rho}(u) = 3 \operatorname{ch} u \underline{i} + \operatorname{sh} u \underline{k}$ ,  $\underline{a} = \underline{j}$

(c)  $\underline{\rho}(u) = (2 \sin u + 3 \operatorname{tg} u) \underline{i} + 2 \cos u \underline{j}$ ,  $\underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} + 4 \underline{k}$

2. Írja fel annak a kúpnek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek vezérgörbéje az adott  $\underline{\rho}(u)$  görbe és csúcs-pontja az  $\underline{a}$  helyvektor végpontja! (Segítség: A kúp általános egyenlete:  $\underline{r}(u, v) = \underline{\rho}(u) + v(\underline{a} - \underline{\rho}(u)) = (1 - v)\underline{\rho}(u) + v\underline{a}$ .)

(a)  $\underline{\rho}(u) = \text{sh } u\underline{i} + \text{ch } u\underline{j}, \quad \underline{a} = 5\underline{k}$

(b)  $\underline{\rho}(u) = u\underline{i} + u^4\underline{j}, \quad \underline{a} = 3\underline{j} + 7\underline{k}$

3. Írja fel annak a forgásfelületnek a paraméteres egyenletrendszerét, amelynek meridiángörbéje az adott  $\underline{\rho}(u)$  görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!

(a)  $\underline{\rho}(u) = (3 + 2 \cos u)\underline{i} + (4 + 2 \sin u)\underline{j}, \quad y\text{-tengely}$

(b)  $\underline{\rho}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 1)\underline{k}, \quad z\text{-tengely}$

(c)  $\underline{\rho}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 5)\underline{k}, \quad y\text{-tengely}$

4. Írja fel az alábbi felületek adott pontbeli érintősíkjának egyenletét! (Megjegyzés: ha a felület  $z = f(x, y)$  alakban adott, akkor a felület vektoregyenletes felírása:  $\underline{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .)

(a)  $\underline{r}(u, v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k}, \quad u = 1, v = -2$

(b)  $\underline{r}(u, v) = u \cos v\underline{i} + u \sin v\underline{j} + v\underline{k}, \quad \text{tetszőleges pontban}$

(c)  $\underline{r}(u, v) = 3 \sin u \cos v\underline{i} + 3 \sin u \sin v\underline{j} + 3 \cos u\underline{k}, \quad u = \frac{\pi}{2}, v = \frac{\pi}{3}$

(d)  $\underline{r}(u, v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (u^2 + v^2)\underline{k}, \quad u = 1, v = 2$

(e)  $\underline{r}(u, v) = (3 + 2 \cos u) \cos v\underline{i} + (3 + 2 \cos u) \sin v\underline{j} + 2 \sin u\underline{k}, \quad u = \frac{\pi}{4}, v = -\frac{\pi}{2}$

(f)  $x^2y + z^3 = 10, \quad P(1, 2, 2)$

5. Számolja ki az alábbi felületek felszínét a megadott tartományon!

(a)  $R$  sugarú gömb:  $\underline{r}(u, v) = R \cos u \cos v \underline{i} + R \cos u \sin v \underline{j} + R \sin u \underline{k}$ ,  $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$

(b) Tórusz:  $\underline{r}(u, v) = (3 + 2 \cos u) \cos v \underline{i} + (3 + 2 \cos u) \sin v \underline{j} + 2 \sin u \underline{k}$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$

(c)  $90^\circ$  nyílásszögű kúp egy része:  $\underline{r}(u, v) = u \cos v \underline{i} + u \sin v \underline{j} + u \underline{k}$ ,  $0 \leq u \leq 5$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$

(d)  $\underline{r}(u, v) = 3u \cos v \underline{i} + 3u \sin v \underline{j} + v \underline{k}$ ,  $0 \leq u \leq 5$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$

(e)  $\underline{r}(u, v) = u \underline{i} + v \underline{j} + (u^2 + v^2) \underline{k}$ , ha  $(u, v)$  az origó körüli 2 sugarú kört futja végig

(f)  $\underline{r}(u, v) = \cosh u \cos v \underline{i} + u \underline{j} + \cosh u \sin v \underline{k}$ ,  $0 \leq u \leq 3$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$

(g) Csavarfelület:  $\underline{r}(u, v) = u \cos v \underline{i} + u \sin v \underline{j} + v \underline{k}$ ,  $0 \leq u \leq 2$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$

(h)  $\underline{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u) \underline{i} + (\sin u + v \cos u) \underline{j} + (u + v) \underline{k}$ ,  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v \leq 1$

(i)  $\underline{r}(u, v) = u^2 \cos v \underline{i} + u^2 \underline{j} + u^2 \sin v \underline{k}$ ,  $0 \leq u \leq 3$ ,  $0 \leq v \leq \pi$

(j)  $\underline{r}(u, v) = \ln u \underline{i} + \ln u \sin v \underline{j} + \ln u \cos v \underline{k}$ ,  $1 \leq u \leq 3$ ,  $0 \leq v \leq \pi$

6. Határozza meg az  $\underline{r}(u, v) = (u^2 + v^2, u + v, u^2 v^2)$  felület  $(u_0, v_0) = (1, -1)$  pontjában a felület típusát!

7. Határozza meg, hogy az  $R$  sugarú gömb  $(R, 0, 0)$  pontjában milyen típusú a felület!

8. Ellenőrizze le, hogy az  $\underline{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$  felület minden pontja parabolikus!

9. Mutassa meg, hogy az  $\underline{r}(u, v) = (\sin v, v, u)$  felület minden pontja parabolikus!

10. Bizonyítsa be, hogy a tórusz külső részén fekvő pontok elliptikusak, a belső részén fekvő pontok hiperbolikusak, a legfelső és legalsó kör minden pontja parabolikus! (tórusz:  $\underline{r}(u, v) = (a + b \cos u) \cos v \underline{i} + (a + b \cos u) \sin v \underline{j} + b \sin u \underline{k}$ )

11. Határozza meg a  $3z + 3xz - yz + x + y = 0$  alakban megadott felület esetén az origóban a felület típusát!