

1. és 3. hét feladatsora  
Ismétlés, teljes várható érték tétel, Poisson folyamat

1. Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje  $E_1$  azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje  $F$  azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy  $E_1$  és  $F$  nem függetlenek. Legyen  $E_2$  az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7.  $E_2$  független-e  $F$ -től?
2. Egy céllövöldében hat puská van. Közülük három olyan, hogy azokkal 0,5 valószínűséggel találunk célba, eggyel a találati valószínűség 0,7, kettővel pedig 0,8. Találomra kiválasztunk egy puskát, majd lövünk. Mekkora a valószínűsége, hogy célbatalálunk? Mekkora a valószínűsége, hogy 0,8-as puskát választottunk, feltéve, hogy a lövésünk talált?
3. Egy bizonyos betegségre kifejlesztett teszt úgy működik, hogy ha a tesztalany beteg, akkor a teszt mindenképpen beteget jelzi a betegséget, míg hogy ha az alany egészséges, 1% eséllyel akkor is betegséget jelez (99% eséllyel pedig azt, hogy az alany egészséges). A populációban átlagosan minden 10000. ember szenved ebben a betegségben. Feltéve, hogy egy találomra választott embernél a teszt betegséget jelez, mekkora az esélye, hogy valóban beteg?

4. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

Legyen  $X$  a szabadba kijutáshoz szükséges idő,  $Y$  pedig a legelső alkalommal kiválasztott ajtó sorszáma. Gondoljuk meg, miért teljesülnek a következő egyenletek:

$$\mathbf{E}(X | Y = 1) = 2, \quad \mathbf{E}(X | Y = 2) = \mathbf{E}(X | Y = 3) = 1 + \mathbf{E}X$$

$$\mathbf{E}(X | Y = 4) = \mathbf{E}(X | Y = 5) = 3 + \mathbf{E}X.$$

Számítsuk ki  $\mathbf{E}X$  értékét.

5. Egy tesztvizsgán 20 kérdés van, mindegyikre igen vagy nem a válasz. Minden kérdésnél három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek  $\frac{5}{7}$ ; csak azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ – ennek  $\frac{1}{7}$ ; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek  $\frac{1}{7}$  a valószínűsége, és ekkor  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel válaszolunk igent, vagy nemet. Mekkora valószínűséggel válaszolunk az első kérdésre helyesen? Milyen eloszlású a helyes válaszok száma? Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 18 helyes választ érünk el?
6. Egy hőmérő úgy működik, hogy ha a valódi hőmérséklet Celsius-fokban mérve  $x$ , akkor a hőmérő  $x - 1$  és  $x$  között egyenletes véletlenszerű értéket jelez ki. Ezt kiküszöbölendő 5-ször mérnek vele egymás után, majd a legnagyobb értéket veszik figyelembe. Mekkora a valószínűsége, hogy az így kapott szám 0,2 foknál többel tér el a valódi hőmérséklettől?
7. 5 szabályos pénzérmét feldobunk, mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 fejet kapunk?
8. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama,  $X$  (100 órában megadva) exponenciális eloszlású úgy, hogy  $\mathbf{P}(X > 10) = 0.8$ . Mi az eloszlás paramétere és mennyi  $X$  várható értéke?
9. Egy populációban a nők magasságának eloszlása normálisnak tekinthető, várható értéke 167 cm, szórása 10 cm. Mekkora a valószínűsége, hogy egy találomra választott nő magassága legalább 190 cm?
10. Florida partjainál évente átlagosan 2,3 cápatámadás történik. Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott évben legfeljebb egy támadás történik?
11. Egy 500 oldalas könyv 500 sajtóhibát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legfeljebb 2 sajtóhiba van? (Feltesszük, hogy minden hiba bármelyik oldalra egyforma valószínűséggel esik.)
12. Számoljuk ki ötöslottón a háromtalálatos szelvény valószínűségét.

13. Egy próbagyártás során 10 gép készül el, melyek közül esetleg néhány hibás. A teljes mennyiségből 3 találmásra kiszemelt gépet megvizsgálunk. A gyártás akkor indul meg, ha a vizsgálat szerint legfeljebb 1 gép hibás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy megindul a gyártás, ha a 10 gépből...
- (a) 4 hibás?  
(b) 1 hibás? (Mi ebből a tanulság a hipergeometrikus eloszlás formulájára?)
14. Jelölje  $X$  egy szabályos kockával való dobás értékét. Számoljuk ki  $X$  várható értékét és szórását.
15. Egy teherautón lévő sóder mennyisége 8 és  $10 \text{ m}^3$  között egyenletes eloszlású. A teherautóról leömlő sóder egy kúpba rendeződik, ahol a kúp magassága és sugara egyenlő. Mekkora a sóder által elfoglalt terület várható értéke ( $\text{m}^2$ -ben)?
16. Egy alacsony forgalmú úton átlagosan percenként két autó megy el. Kiállunk az út mellé egy adott időpontban. Jelölje  $X$  azt, hogy mennyi idő telik el az első autóig. Milyen  $X$  eloszlása? Jelölje  $Y$  azt, hogy hány autót látunk két perc alatt. Milyen  $Y$  eloszlása?
17. Tegyük fel, hogy egy webkiszolgálóhoz percenként átlagosan 5 kiszolgálási igény érkezik. Mi a valószínűsége, hogy egy 30 másodperces periódusban legalább 3 kérést kell kiszolgálni?
18. Egy 120 fős középiskolai évfolyam biológia és matematika jegyei a következőképpen alakultak:

| $B \backslash M$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 |
|------------------|---|---|---|----|---|
| 1                | 1 | 2 | 2 | 1  | 4 |
| 2                | 2 | 4 | 4 | 8  | 2 |
| 3                | 4 | 8 | 8 | 12 | 8 |
| 4                | 5 | 4 | 6 | 9  | 6 |
| 5                | 0 | 6 | 4 | 6  | 4 |

Kiválasztunk egy tanulót az évfolyamból találmásra; legyen a matematika jegye  $X$ , a biológia jegye  $Y$ .

- (a)  $\mathbf{P}(\text{a kiválasztott tanuló megbukott legalább az egyik tárgyból}) = ?$   
 (b)  $\mathbf{E}(X) = ?$   
 (c)  $\mathbf{E}(X|Y \geq 4) = ?$   
 (d) Független-e  $X$  és  $Y$ ?  
 (e)  $\text{cov}(X, Y) = ?$
19. Pistike és Mórcka a következő játékot játsszák: van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockájuk, melyek közül az egyik szabályos, azaz  $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$  valószínűséggel lesz felül az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak  $\frac{1}{2}$  a valószínűsége, a többi számnak  $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$ . Találmásra elveszi az egyik kockát Pistike, a másikat Mórcka, majd elkezdenek dobálni.
- (a) Mekkora valószínűséggel választotta Pistike a cinkelt kockát, feltéve, hogy az első két dobása 6-os lett?  
 (b) Jelölje  $X$  Mórcka első dobásának értékét és  $Y$  Pistike első dobásának értékét. Mennyi  $\text{cov}(X, Y)$ ? (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt.)
20. A Sóder kft. az építőiparban tevékenykedik. Minden hónap elején 70% eséllyel kapnak munkát. A munka mindig ugyanaz, minden esetben egy hónapig tart, és a bevétel egy ilyen munkából 1 millió forint. Egy tétlenül töltött hónap bevétele 0.
- (a) Mennyi 30 hónap alatt a bevételük várható értéke?  
 (b) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 20 millió forint.  
 (c) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 15 millió forint.
21. Egy dobozban hat cédula van. 1 cédulán 1-es, 2 cédulán 2-es és 3 cédulán 3-as szám áll. 30-szor húzunk találmásra a dobozból visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy a húzott számok összege meghaladja a 77-et? (Normális eloszlás segítségével adjunk közelítő értéket.)

22. Assume that an urn contains 5 red balls, 3 white balls and 7 green balls. Draw 3 balls from the urn without replacing the already drawn balls to the urn. Find the probability that "the first and the second draws are red and the third one is green".
23. In ping-pong the first player who achieves 11 points is the winner of the match. However, the winner should win with a difference of at least 2 points. Hence if the current state is 10-10 then the game continues until one of the players has an advantage of 2. In a championship the champion win 100000 HUF. The final match of this championship is played by two equally strong players. During this final match there is a powerbreak. Before the powerbreak the state of the game was 10-9. It is not possible to finish the game after the powerbreak. Hence, it is decided to divide the prize money among the two finalists. In which proportion it would be fair to divide the prize money?
24. In a certain country, 60 percent of the population is right-handed, 40 percent is left-handed. A right-handed person is able to hit a certain target with his left hand with a probability 0.2. For a left-handed person this probability is definitely larger, it is 0.7. A person is chosen at random.
  - (a) What is the probability that a person hits the target with his/her left hand?
  - (b) Assume that you get the information that a person hit the target with the left hand. What is the probability that that person is left-handed?
25. We roll two fair dice a blue and a red. We first roll the red die then we roll the blue die as many times as the outcome of the red die. Let  $Y$  denote the outcome of the red die and denote by  $X$  the sum of the outcomes on the blue die.
  - (a) Find  $E(X)$ .
  - (b) What is the sign of  $cov(X, Y)$ ?
26. Some years ago I met an old fisherman. He was fishing in a big lake, in which many small fish were swimming regardless of each other. He raised his net from time to time, and collected the fish if there were any. He told me that out of 100 cases the net is empty only 6 times or so, and then he added: "If you can guess the number of fish in the net when I raise it out of the water the next time, I will give you a big sack of money." I am sure he would not have said such a promise if he knew that his visitor was a well educated person in probability theory! I was thinking a little bit, then I made some calculation, and then I said a number. Which number did I say?
27. In the nearest forest a running contest were organized. We know that 300 contestants found 1 tick, 75 contestants found 2 ticks on their bodies. Can we guess the total number of contestants in the contest?
28. The distributions of random variables  $X$  and  $Y$  are exponential with parameters 2 and 3 respectively. What is the distribution of  $\min\{X, Y\}$ ? Compute the probability that the minimum is attained by  $Y$ !
29. Egy kis forgalmú úton átlagosan 2 percenként halad el egy autó. Kiállok az út mellé és számolom az autókat. Mi a valószínűsége annak, hogy...
  - (a) 5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem?
  - (b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?
  - (c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?
  - (d) Az elhaladó autók tizede piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó?
  - (e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?
30. Egy telefonközpontba 5 perc alatt átlagosan 8 helyi hívás és 2 távolsági hívás érkezik.
  - (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik?
  - (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?
  - (c) Mekkora a feltételes valószínűsége annak, hogy egy 2 perces időszak alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik, feltéve, hogy ugyanezen idő alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?

31. Pistike kapálás közben óránként átlagosan 3 cserebogárral és 5 krumplibogárral találkozik (más fajta bogár nem él Pistikék kertjében).
- (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 20 perc kapálás alatt pontosan két bogárral találkozik?
  - (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 20 perc kapálás alatt pontosan egy cserebogárral és pontosan egy krumplibogárral találkozik?
  - (c) Feltéve, hogy 20 perc kapálás alatt pontosan két bogárral találkozik, mekkora a valószínűsége, hogy azok különbözőek?
32. Egy kiszolgálóhoz A és B típusú adatsomagok érkeznek. A típusú csomagokból átlagosan másodpercenként 1 érkezik, B típusúból másodpercenként átlagosan 2. Mekkora a valószínűsége, hogy A típusú csomag érkezik előbb? Milyen az első csomag érkezéséig eltelt idő eloszlása?
33. Egy egyirányú úton percenként átlagosan 2 autó halad el. Pistike az ablakból dobálja követ az elhaladó autókra. Minden egyes kocsinak  $\frac{1}{4}$  eséllyel töri be az ablakát. Móricka, aki a Pistikék utáni házban lakik, számolja a törött illetve ép ablakú autókra. Mekkora a valószínűsége, hogy Móricka 1 perc alatt legfeljebb 2 törött ablakú és pontosan 1 ép autót számol meg?
34. Tekintsünk egy 1 paraméterű Poisson-pontfolyamatot az egyenesen. Legyen  $X_1$  a 0 és 3 közötti érkezések száma,  $X_2$  pedig a 2 és 4 közötti érkezések száma. Mennyi  $\text{cov}(X_1, X_2)$ ? (Tipp: bontsuk fel  $X_1$ -et és  $X_2$ -t is további változók összegére.)
35. Egy úton a kamionokat számoljuk. A kamionforgalom sűrűsége napközben nem állandó, az óránként elhaladó kamionok számának rátafüggvénye a következő:

$$r(x) = 6 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \quad x \in [0, 24]$$

- (a) Ábrázoljuk a rátafüggvényt. Hol van maximuma?
- (b) Mekkora az egy nap alatt elhaladó kamionok számának várható értéke?
- (c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 12 és 13 óra között pontosan 3 kamion halad el?