Sztochasztika
3. gyakorlat

1. Legyen X $\mathbb{N}$-értékű valváltozó. Jelöljük $G(z)$-vel a generátorfüggvényét. Írjuk fel $Y := X + 1$ és $Z := 2X$ generátorfüggvényét G segítségével.

2. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.
   (a) Írjuk fel egy dobókocka generátorfüggvényét. Hogyan kapható meg ebből $\mathbb{E}Y$ értéke?
   (b) Írjuk fel X generátorfüggvényét és számítsuk ki ez alapján $\mathbb{E}X$-et és $\sigma(X)$-et.

3. Egy szabályos dobókockát dobálunk. Jelölje X azt, hányadik dobásra jön ki először egymás után két hatos (pl. 1462655661 sorozat esetén $X = 9$). Határozzuk meg X generátorfüggvényét, majd ennek segítségével X várható értékét és szórását.

4. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy pénzérmét dobálnak, melyen a fej valószínűsége p, az írásé $q = 1 - p$. Ha fej jön ki, Béla fizet Jenőnek 1 forintot, írás esetén pedig Jenő fizet Bélának 1 forintot. Jelölje τ azt, hogy hány kör múlva lesz Jenő nyereménye először 1 forint a játék folyamán (esetleg előfordulhat $\tau = \infty$ is). Legyen $G(x)$ τ generátorfüggvénye, azaz $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = n)x^n$.
   (a) Írjunk fel $G(x)$-re egy függvényegyenletet a teljes várható érték tétel segítségével az első dobás alapján. Oldjuk meg az egyenletet és adjuk meg a $G(x)$ függvényt.
   (b) Jelölje θ azt, hogy hány kör múlva lesz először újra döntetlen az állás. Írjuk fel θ generátorfüggvényét, $F(x)$-et, $G(x)$ segítségével.
   (c) Milyen következtetést vonhatunk le $G(1)$ és $F(1)$ értéke alapján?

5. (a) Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$. Gondoljuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = F^n(x)$.
   (b) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$. Legyen ν ezektől független, pozitív egész értékű valószínűségi változó. Jelölje ν *generátorfüggvényét* $G(z)$. Mutassuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.
   (c) Egy vetélkedőn 3-5 fős csapatok vesznek részt. Egy csapat minden tagjának háromszor kell dobnia egy labdával, és a csapat eredménye ezen dobások közül a legnagyobb. A versenyen minden résztvevő egyformán jól dob, egy dobás nagyságának sűrűségfüggvénye (méterben):
   $$f(x) = \frac{50}{3x^2}, \quad 10 \le x \le 25$$
   A versenyen ugyanannyi 3, 4 illetve 5 fős csapat van. Találomra kiválasztunk egy csapatot. Mi az eredményük eloszlásfüggvénye?

6. The generating function of a nonnegative integer valued random variable is
   $$g(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$
   What is the discrete probability distribution (namely the probabilities $P(X = k)$)? What is the expectation and variance of X?

7. We toss a fair coin 3 times, and a biased coin with $P(heads) = \frac{1}{3}$ also three times. Let Z denote the total number of heads seen. Calculate the generating function of Z.

8. Let X_1, X_2, . . . be i.i.d. $\mathbb{N}$ valued random variables. Furthermore, let N be an $\mathbb{N}$ valued random variable which is independent of the Xs. Let Y be equal to $\sum_{i=1}^{N} X_i$. Show that
   - $E(Y) = E(N)E(X_1)$,

- the variance $D^2(Y)$ of Y is equal to $D^2(N)(E(X_1))^2 + E(N)D^2(X_1)$.

9. We keep rolling a fair die until we first roll a 6. Let X denote the sum of the numbers rolled before (and not including) that 6. Calculate

   - the generating function of X,
   - the expectation of X,
   - the variance of X.

   (Warning: What is the conditional distribution of a number rolled under the condition that it is not a 6?)

10. Between 8 and 9 am the number X of requests arriving to the router has Poisson distribution with parameter λ. Each request may come independently of each other from places A and B with probability p and $(1-p)$ respectively. What is the distribution of the number of requests coming from place A?

11. Between 8 and 9 am the number X of requests arriving to the router has Binomial distribution with parameters (n, r). Each request may come independently of each other from places A and B with probability p and $(1-p)$ respectively. What is the distribution of the number of requests coming from place A?

12. Find the generator functions of the pessimistic and the optimistic geometric distributions!