Hatodik A4 gyakorlat

1. Folytonos eloszlások

Eloszlásfüggvény: Egy X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az x pontban felvett értéke megadja, hogy mekkora valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb értéket: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}$.
Az eloszlásfüggvény jellemzői:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ben 1-hez tart,
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$,
3. folytonos eloszlás esetén folytonos (egyébként csak balról folytonos).

Sűrűségfüggvény: A folytonos esetben azt is feltesszük, hogy van olyan f *sűrűségfüggvény*, amellyel $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ x \in \mathbb{R}$. Mivel $F(x)$ folytonos, ezért minden x pontban $f(x) = F'(x)$. Tetszőleges (a, b) vagy $[a, b]$ intervallumba esés valószínűsége a folytonos esetben:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

A valószínűségi változó *várható értéke* a folytonos esetben:
$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$

Exponenciális eloszlás: A λ paraméterű exponenciális eloszlás
eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$,
sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$.
Egy valószínűségi változó *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő: $\mathbb{P}(X > s+t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ minden $s, t \geq 0$ esetén. Azaz ha a valószínűségi változó valaminek az élettartama, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: amíg a szóbanforgó dolog „él”, a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak.
Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.
Folytonos egyenletes eloszlás és normális eloszlás már szerepelt korábbi gyakorlatainkon.

2. Feladatok

1. Legyen X egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó az (a, b) intervallumon.

   a) $F(x) = \mathbb{P}(X < x) =?$

   b) $\frac{\mathbb{P}(X \in (x_1, x_2))}{x_2 - x_1} =?$ ha $a < x_1 < x_2 < b$.

2. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény? (Ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0.)

   a) $F(x) = 1 + e^{-x+1}$ ha $-1 < x$

   b) $G(x) = 2 - \dfrac{2}{x+1}$ ha $x \geq 0$

   c) $H(x) = 1 - e^{-x}$ ha $x \geq 0$

   d) $I(x) = \dfrac{x}{4}(4-x)$ ha $0 < x \leq 2$ és 1 ha $x > 2$

3. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (Amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

   a)
   $$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

   b)
   $$g(x) = \frac{\sin(x)}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

   c)
   $$h(x) = \frac{1}{3}\sin(\frac{x}{2}) \quad \text{ha} \quad 0 < x < \pi \quad \text{és} \quad 3^{x-1}\ln(3) \quad \text{ha} \quad x \leq 0$$

   d)
   $$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

4. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik?

5. Egy l hosszúsági ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbik eloszlásfüggvénye?

6. A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? És ha 10 pontot választunk, mi a 6. eloszlásfüggvénye?

7. Válasszunk az egységnégyzetben egyenletesen egy pontot. Jelölje X e pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg az X eloszlását! Mi annak a valószínűsége, hogy a pontunk távolabb van az oldalaktól, mint $1/4$? Mennyi X várható értéke?

8. Egy távolsági busz egyenletes eloszlás szerint érkezik a megállóba, munkanapokon 13:00 és 13:15 között, hétvégén 13:00 és 13:10 között. Utazásaim $1/3$-a hétvégére, $2/3$-a hétköznapra esik. Mindig 13:00-ra érkezünk a buszmegállóba. Határozzuk meg a buszra várakozás eloszlását. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb mint 5 percet kell várakoznunk?

9. Egy busz az A és B városok között közlekedik, amelyek távolsága 100 km. Ha a busz meghibásodik, a meghibásodás helyének a távolsága az A várostól egyenletes eloszlású a $(0, 100)$ km intervallumon. Busz-szerviz A-ban, B-ben és a félúton van. Egy javaslat szerint jobb lenne a szervizeket A-tól 25, 50 és 75 km-re elhelyezni. Hasonlítsa össze a két alternatívát!

10. Egyenletesen választunk egy félkoríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy-eloszlás.)*

11. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az árkuszszinusz-eloszlás.)*

12. Egyenletesen választunk egy pontot a $[-1, 1]$ intervallumban, jelöljük ezt X-szel. Mi annak a valószínűsége, hogy $X^3 < 0.5$? És ha a pontunkat a $[0, 1]$-ben választjuk egyenletesen? Mi lesz X^3 eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Mi lesz a várható értéke? Milyen x-re lesz $F(x) = 0.5$? *(Azt az x számot, melyre $P(X < x) = 0.5$, az X valószínűségi változó mediánjánal nevezzük. Hasonlítsuk össze a várható értékkel!)*

13. Legyen X^2 egyenletes a $[0, 1]$-en. Mi lesz X eloszlása? Mi a mediánja, várható értéke?

14. Egy bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{2}{x^3}$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a dél-szaharait, aminek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ha $x > 1$) vagy a bergengócot? Átlagosan mennyit időt bírnak ki ezek a DVD-k?

15. Egy buszmegállóban annak a valószínűsége, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 prcet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

16. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

17. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

18. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

19. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

20. Tapasztalataink szerint egy bizonyos téren naponta összesöpört szemét mennyisége más napoktól függetlenül normális eloszlást követ 5,5 kg várható értékkel és 1,5 kg szórással. Mi a valószínűsége annak, hogy három egymást követő nap mindegyikén az összesöpört szemét mennyisége kevesebb, mint 6 kg?

21. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > 1/2$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

22. Legyen az X egy tetszőleges folytonos valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, U pedig egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $F(x)$ invertálható a teljes számegyenesen. Határozzuk meg $F^{-1}(U)$ eloszlását! (Általánosított inverz eloszlásfüggvény használatával nincs szükség a folytonosság és az inverz létezésének feltevésére, de ezzel részletesebben nem foglalkozunk).